

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTE DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

HENRY DU BOSQ DE BEAUMONT

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ÈS SCIENCES PHYSIQUES

— 3 —

1^{re} THÈSE

ÉTUDE CRITIQUE DE CERTAINS PROLONGEMENTS DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE
THERMODYNAMIQUE ET VISCOSITÉ

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

ÉTABLISSEMENT DU COURANT DANS UN CIRCUIT
AVEC RÉSISTANCE ET SELF-INDUCTION VARIABLE

Soutenues, le 19 avril 1948, devant la Commission d'Examen

— 2 —

<i>Jury</i> {	MM. CABANNES	<i>Président.</i>
	DARMOIS	} <i>Examineurs.</i>
	AUBERT	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

HENRY DU BOSQ DE BEAUMONT

LICENCIÉ ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES ET ÈS SCIENCES PHYSIQUES

1^{re} THÈSE

ÉTUDE CRITIQUE DE CERTAINS PROLONGEMENTS DE LA MÉCANIQUE RATIONNELLE
THERMODYNAMIQUE ET VISCOSITÉ

2^e THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

ÉTABLISSEMENT DU COURANT DANS UN CIRCUIT
AVEC RÉSTANCE ET SELF-INDUCTION VARIABLE

Soutenues, le 19 avril 1948, devant la Commission d'Examen



Jury	{	MM. CABANNES	{	Président,
		DARMOIS		Examineurs.
		AUBERT		

ÉTUDE CRITIQUE
DE CERTAINS PROLONGEMENTS
DE LA
MÉCANIQUE RATIONNELLE

THERMODYNAMIQUE ET VISCOSITÉ

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen M. J. CABANNES

PROFESSEURS

L. BLARINGHEM . .	T	Botanique.	J. BOURCART . .	Géographie physique et Géologie dynamique.
G. JULIA	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	M ^{me} JOLIO-CURIE . .	T Physique générale et radio- activité.
C. MAUGUIN . .	T	Minéralogie.	PLANTEFOL . . .	T Botanique.
A. DENJOY . . .	T	Théorie des fonctions.	CABANNES	T Recherches physiques.
L. LUTAUD . . .	T	Géographie physique et Géologie dynamique.	GRASSE	T Zoologie (Evolution des êtres organisés).
E. DARMOIS . .	T	Enseignement de physique.	PRÉVOST	Chimie organique.
Robert LÉVY . .	T	Physiologie comparée.	BOULIGAND . . .	T Application de l'analyse à la Géométrie.
Henri VILLAT . .	T	Mécanique des fluides et applications.	CHAUDRON . . .	T Chimie.
Ch. JACOB . . .	T	Géologie.	WYART	Minéralogie.
P. PASCAL . . .	T	Chimie générale.	TEISSIER	T Zoologie.
M. FRECHET . .	T	Calcul des probabilités et Physique mathématique.	MANGENOT . . .	T Biologie végétale.
M ^{me} RAMART-LUCAS.	T	Chimie organique.	P. AUGER	T Physique quantique et rela- tivité.
H. BEGHIN . . .	T	Mécanique physique et expérimentale.	MONNIER	Physiologie générale.
FOCH	T	Mécanique expérimentale des fluides.	PIVETEAU	Géologie.
PAUTHENIER . .	T	Electrotechnique générale.	ROCARD	T Physique.
DE BROGLIE . .	T	Théories physiques.	H. CARTAN . . .	Calcul différentiel.
JOB	T	Chimie générale.	SCHAEFFER . . .	T Physiologie des fonctions.
PRENANT	T	Anatomie et Histologie comparées.	LAFFITTE	Chimie (P.C.B.).
VILLEY	T	Mécanique appliquée.	FAVART	Calcul des probabilités et Physique mathématique.
COMBES	T	Physiologie végétale.	COULOMB	T Physique du globe.
GARNIER	T	Géométrie supérieure.	M ^{lle} COUSIN . . .	Biologie animale (P.C.B.).
PÉRÈS	T	Mécanique rationnelle.	CHRÉTIEN	Analyse et mesures chi- miques.
HACKSPILL . . .	T	Chimie minérale.	DRACH	Evolution des êtres orga- nisés.
TOUSSAINT . . .	T	Technique aéronautique.	CHATELET	T Arithmétique et théorie des nombres.
M. CURIE	T	Physique (P.C.B.).	EPHRUSSI	T Génétique.
G. RIBAUD . . .	T	Hautes températures.	WURMSER	T Biologie physico-chimique.
CHAZY	T	Mécanique analytique.	KASTLER	Physique.
H. GAULT	T	Chimie appliquée.	BAUER	T Chimie physique.
CROZE	T	Physique théorique et Physique céleste.	RIVIÈRE	Géologie (P.C.B.).
DUPONT	T	Théories chimiques.	GAUTHERET . . .	Biologie végétale (P.C.B.).
LANQUINE . . .	T	Géologie structurale et Géologie appliquée.	LUCAS	Physique.
VALIRON	T	Calcul différentiel et Calcul intégral.	Max MORAND . .	Physique.
BARRABE		Géologie structurale et Géologie appliquée.	ARNULF	Optique appliquée.
VAVON	T	Analyse et mesures chi- miques.	A. THOMAS . . .	Zoologie.
G. DARMOIS . .	T	Mathématiques générales.	SOLEILLET . . .	Physique.
AUBEL	T	Chimie biologique.	FORTIER	Mécanique expérimentale des fluides.
			DANJON	T Astronomie.
			FROMAGEOT . . .	Chimie biologique.
			LAPORTE	Physique générale et radio- activité.

Secrétaire Ch. MONIER

A la mémoire
de
mon Vénéré Maître
Amédée GUILLET
Professeur à la Faculté des Sciences

Ce travail, entrepris sous la direction de M. Amédée GUILLET, a été poursuivi en étroit contact avec les Professeurs et Chercheurs du Laboratoire de Recherches Physiques de la Sorbonne.

Je tiens à exprimer ma très sincère gratitude à M. le Doyen, Jean CABANNES, de l'Académie des Sciences, Directeur de ce Laboratoire, qui a bien voulu favoriser ces recherches, à MM. les Professeurs AUBERT, VILLEY et Eugène DARMOIS, auprès desquels j'ai retrouvé la direction et l'appui que je venais de perdre à la mort du Professeur Amédée GUILLET, aussi très particulièrement, à M. l'Ingénieur Général de l'Air Pierre VERNOTTE, qui s'est intéressé à ce travail et a bien voulu l'accueillir dans la collection qu'il dirige.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE PREMIER

La Thermodynamique, son origine et ses principes spécifiques	1
--	---

CHAPITRE II

Le paradoxe de M. Marius AUBERT	11
---------------------------------------	----

CHAPITRE III

Preliminaires à l'étude des mouvements d'un milieu continu et de la viscosité	14
---	----

CHAPITRE IV

La viscosité	21
IV-3 Étude approfondie des mouvements permanents giratoires	28
IV-4 La question du coin d'huile	35

CHAPITRE V

Conclusion	47
------------------	----

LA THERMODYNAMIQUE, SON ORIGINE ET SES PRINCIPES SPÉCIFIQUES

I-1 En *Mécanique Rationnelle*, et pour ce qui est de la dynamique des systèmes, on connaît les combinaisons de calcul qui, par une voie purement déductive, conduisent aux sept équations du mouvement dites universelles.

Nous porterons ici notre attention sur la *septième équation*, celle où les forces intérieures ne s'éliminent pas; c'est-à-dire que les forces appliquées aux différents *points* (points mathématiques à strictement dire, d'un système) étant séparées en intérieures et en extérieures, les premières représentent les actions mutuelles de ces différents *points* en question; elles sont donc égales deux à deux et directement opposées puisqu'on admet le *principe de l'égalité de l'action et de la réaction*, les secondes concernant les actions s'exerçant entre les points précédents et d'autres points existant éventuellement.

Une dynamique des systèmes construite par une voie déductive, du genre de celle que nous venons de rappeler, doit nécessairement présenter un caractère restreint, du moins pour autant qu'on maintiendra dans l'interprétation des formules ces hypothèses qui ont servi à les déduire d'un schéma particulier auquel se tient la Mécanique Rationnelle. En effet, *l'équation dite des forces vives*, dont il est précisément question, peut être entendue dans un sens plus large que celui qui découle des principes qui ont servi à son établissement.

Soit, selon une notation en usage et qui ne présente aucune ambiguïté à partir des définitions et hypothèses précédentes et usuelles :

$$(1) \quad d \sum \frac{m_j v_j^2}{2} = \sum \sum (X_i dx_j + Y_i dy_j + Z_i dz_j) + \sum \sum (X_e dx_j + Y_e dy_j + Z_e dz_j).$$

Le premier membre de cette équation désigne la somme des accroissements des forces vives des différents *points* (x_j, y_j, z_j) du système de masses et vitesses respectives m_j, v_j ; nous ne nous y attarderons pas pour le moment et en considérerons le second membre selon l'écriture simplifiée :

$$(2) \quad d\theta = \sum_{j=1}^{j=n} \Xi_j d\xi_j,$$

où les Ξ_j sont, comme précédemment, les forces réellement appliquées et les ξ_j les coordonnées précédemment considérées. Cette *forme linéaire de différentielles*, désignée par $d\theta$, représente l'accroissement de la somme des travaux de l'ensemble des forces appliquées au système tant extérieures qu'intérieures.

C'est-à-dire que, selon cette notation, la première formule s'écrirait :

$$(1') \quad d \sum \frac{m_j v_j^2}{2} = d\theta.$$

Relativement à une expression telle que $d\theta$, donnée par (2), on peut d'abord, pour ce qui est de l'analyse pure, faire les remarques et observations suivantes :

Les n forces Ξ_j peuvent être fonctions des n variables ξ_j seules mais, du point de vue plus général que nous considérerons, on pourra envisager le système des $2n$ fonctions (Ξ_j, ξ_j) comme dépendant d'un système convenable de $2n$ variables indépendantes au plus (certains Ξ_j peuvent être identiquement nuls; ce qui, on le remarquera, pour une annulation par exemple, ramène la forme à $(n - 1)$ termes additifs et le nombre maximum de variables étant maintenu à $2n$) par exemple les n variables ξ_j et n autres variables au plus et sans avoir à préjuger jusqu'à présent si les $2n$ fonctions précitées constituent ou non un système de fonctions indépendantes. Nous reviendrons plus loin et à plusieurs reprises sur cette question.

Maintenant et tout à fait indépendamment de la possibilité matérielle de les réaliser, point de vue qui sera justifié par la suite, faisons décrire des *cycles* au système de variables indépendantes et considérons, pour un cycle quelconque, l'intégrale curviligne :

$$(3) \quad Q = \int_{\sigma} \sum_{j=1}^{j=n} \Xi_j d\xi_j.$$

La *forme de différentielles* en question n'étant même pas une différentielle totale, Q ne saurait en général être nul et il résulte de l'écriture précédente même, que l'accroissement élémentaire de Q doit être de la forme :

$$(4) \quad dQ = d\Phi + \sum_{j=1}^{j=n} \Xi_j d\xi_j,$$

Φ étant une certaine fonction des variables indépendantes (au nombre de $2n$ au plus).

Ceci posé et *cherchant à faire cadrer ce résultat avec l'équation* (1), on dira que (3) est une conséquence de (1), (4) est bien une conséquence de (3), donc de (1), et que, par suite :

$$(5) \quad dQ = d\Sigma \frac{m_j v_j^2}{2} + d\Phi.$$

Rappelant que ceci est une conséquence du système d'hypothèses ayant servi à l'établissement de (1), c'est-à-dire de celles qui président à l'établissement de la dynamique des systèmes, on peut étendre le point de vue.

Supposant donnée une *forme linéaire de différentielles* telle que (2), représentant par exemple un travail élémentaire physiquement défini, nous avons en somme établi qu'il y correspondra une équation telle que (4). On observera alors que nous ne sommes

nullement obligés d'admettre la relation (5). Pour fixer les idées, on pourrait par exemple imaginer que l'on aurait :

$$(6) \quad dQ = d \sum \frac{m_j v_j^2}{2} + dQ',$$

dQ' n'étant pas une différentielle totale. Nous allons nous en expliquer :

— du point de vue du *principe de l'Énergie*, on séparera les travaux en ceux qui résultent des *forces internes*, c'est-à-dire des interactions moléculaires atomiques ou électroniques, et en ceux qui résultent des *forces externes* qui seront les forces et travaux directement observables, *ces définitions n'ayant aucun rapport nécessaire avec celles des forces extérieures et intérieures* que nous avons rappelées. On admet généralement en Physique que les *forces internes* dérivent d'un potentiel, c'est-à-dire que, pour une certaine partie constituante de $d\theta$:

$$(7) \quad \sum_{j=k_1}^{j=k_m} \Xi_j d\xi_j = dV \quad (m < n),$$

V étant une fonction des variables. L'équation (4) s'écrira donc en cette hypothèse :

$$(8) \quad dQ = d(\Phi + V) + \sum_{j=k_{m+1}}^{j=k_n} \Xi_j d\xi_j,$$

la sommation figurant au second membre portant sur le reste des termes qui expriment $d\theta$, et non compris dans (7).

En établissant cette formule (8), nous avons au moins montré que la fonction potentielle $(\Phi + V)$ mise en évidence ne se réduit pas nécessairement, à priori, à la fonction supposée V dont dériveraient les *forces internes et qui peut, en conséquence, ne pas même exister*.

En effet, on peut parfaitement penser que la somme des travaux des *forces internes* aurait, en totalité ou partie, une valeur statistique transmissible ou échangeable intérieurement, en tout ou partie, comme il en est, en l'hypothèse habituelle, des forces vives qui concourent à former dQ .

Si l'on intègre maintenant (8) sur un cycle, on a :

$$(9) \quad Q = \int_c \sum_{j=k_{m+1}}^{j=k_n} \Xi_j d\xi_j.$$

Différemment de (3), l'intégration ne porte plus que sur les travaux des *forces directement observables ou externes*, la valeur de Q ne sera la même que dans (3) que si l'on admet l'hypothèse qu'exprime (7), mais nous n'y sommes pas obligés et c'est, en tout état d'hypothèse, *l'expression (9) qui servira de moule au principe de l'équivalence*; le premier membre désignant sous réserve d'adaptation expérimentale à intervenir, *la quantité de chaleur* correspondant au cycle qui doit par conséquent être égale aux travaux des *forces externes* sur le cycle.

Sous forme différentielle, l'équation (9) s'écrira :

$$(10) \quad dQ = dU + \sum_{j=k_{m+1}}^{j=k_n} \Xi_j d\xi_j,$$

U étant une fonction des coordonnées représentant, par exemple $(\Phi + V)$ selon ce qui a été mis en évidence précédemment, mais non nécessairement.

On ne peut donc dire que cette fonction U, que l'on désigne sous le vocable d'*Énergie interne*, résulterait exclusivement de travaux internes dérivant d'une fonction des forces, ou de la somme d'une telle fonction de forces et d'une autre fonction potentielle, mais bien plutôt, en admettant qu'elle existe effectivement ou à titre d'approximation, comme nous le supposons, la somme de deux termes qui, pris individuellement, n'ont pas à se réduire, *a priori*, à des fonctions des coordonnées bien que leur somme, d'après (9) et (10), doive cependant s'y réduire effectivement; tel sera le point de vue à adopter *sous réserve* d'une possibilité d'application expérimentale dont nous allons *précisément être amenés à reconnaître les modalités nécessaires*.

En définitive, posant que :

$$(11) \quad d\tilde{\mathcal{C}} = \sum_{j=k_n+1}^{j=k_n} \Xi_j dz_j,$$

forme linéaire de différentielles $d\tilde{\mathcal{C}}$ qui représente le travail élémentaire des forces directement observables ou externes, le principe de l'Énergie s'exprimera par :

$$(12) \quad dQ = dU + d\tilde{\mathcal{C}},$$

où dQ et $d\tilde{\mathcal{C}}$ sont des formes linéaires de différentielles et dU une différentielle totale.

Quant à cette relation (12), $d\tilde{\mathcal{C}}$ est donné qualitativement et quantitativement, alors que nous n'avons encore sur les deux autres termes, dQ et dU , considérés isolément, que certains renseignements d'ordre qualitatif, nous voulons dire formel, dont nous avons intérêt d'ailleurs à ne pas préciser excessivement la nature par avance. Le sens de cette dernière phrase nous paraissant aussi clair que rationnellement possible à la lumière de l'ensemble de l'exposé et de la discussion que nous venons de développer jusqu'à présent.

Ainsi l'équation (9) concernant les cycles, nous fournira une méthode pour mesurer certaines quantités de chaleur Q, ainsi définies, au moyen des travaux correspondants; l'expérience prouve, et ceci est essentiel, que l'effet de ces quantités de chaleur mesurées par conséquent d'une autre façon, par exemple, au moyen d'un calorimètre, qui a aussi pour but d'uniformiser les mesures, conduit à des mesures proportionnelles aux précédentes; c'est-à-dire à celles qui découlent de leur définition primitive à partir des travaux des forces observables, du moins aux écarts d'expérience admissibles près et, encore, tout à fait indépendamment de la façon dont les dites quantités de chaleur ont été obtenues (uniformisation).

En ceci consiste, comme on sait, le *principe expérimental de l'équivalence*.

Ce fait expérimental, qui aurait fait défaut si l'uniformisation invoquée avait été impossible, nous autorise à développer les conséquences de notre équation (12), c'est-à-dire de tenter l'extension à la mesure d'une quantité de chaleur provenant d'une transformation quelconque (non fermée) et à la mesure d'une quantité d'*Énergie interne*.

Nous avons, en effet, à partir de (12) :

$$(13) \quad Q_A^B = \Delta_A^B U + \int_A^B d\tilde{\mathcal{C}},$$

Q_A^B étant mesuré, d'une part, au moyen d'un *calorimètre* et $\int_A^B d\mathfrak{E}$ évaluée, d'autre part, d'après la définition même de son écriture; comme il a été dit, nous obtiendrons ainsi les différences $\Delta_A^B U$ qui doivent être *des fonctions de point* des limites A, B.

Il n'existe pas, jusqu'à présent, de contradiction manifeste et qui ne puisse s'expliquer, au principe et à la méthode que nous venons d'exposer, qui sont à la base de la *calorimétrie* et de la *mesure de l'Énergie* et qui font l'objet de ce qu'on convient d'appeler le *premier principe de la Thermodynamique*.

Selon l'esprit de ce travail, ce *premier principe*, sous la forme analytique classique que nous en avons donnée, est donc de bonne approximation quant à un ordre étendu de phénomènes. Comme nous allons précisément l'établir, du moins sous la forme analytique en question, *il ne peut s'agir cependant que d'une approximation*.

I-2 D'un point de vue purement rationnel, nous voulons dire analytique, le *second principe de la Thermodynamique* ne saurait être dissocié du premier dont il ne constitue qu'un développement formel, ceci pouvant être dit dans ce sens, sans avoir à préjuger des confrontations expérimentales à intervenir.

Relativement à l'équation (12), considérée comme expérimentalement confirmée en son emploi, c'est-à-dire dont les forme et conséquences analytiques sont évidemment indépendantes de l'expérience, et qui permet donc la mesure de quantités de chaleur et d'énergie grâce à l'emploi du calorimètre formé par exemple par l'association de masses d'eau convenables et d'un certain volume de gaz approprié à volume ou à pression constants, dont on mesure la pression ou le volume (thermomètre à gaz à volume ou pression constants), on observera, et ceci est essentiel, qu'il est loisible d'adjoindre la masse absorbante du calorimètre au système lui-même pour former un nouveau système qui va nous permettre de mettre en évidence certains faits fondamentaux.

Soit, en effet, dQ la quantité de chaleur cédée au calorimètre et dQ' celle cédée au système par le calorimètre; on a, d'après ce qui a été établi :

$$dQ + dQ' = 0,$$

puisque cette équation n'est autre que :

$$(14) \quad (dU + d\mathfrak{E}) + (dU' + d\mathfrak{E}') = 0,$$

qui revient à (12) quand il n'existe pas de calorimètre extérieur au système, ce qui est le cas.

A noter cependant que nous avons admis que l'*Énergie interne* $U + U'$ est *additive* en fonction de l'additivité des parties, ce que l'on peut admettre comme une définition nécessaire à l'établissement de la calorimétrie. C'est-à-dire que U et U' sont respectivement les accroissements d'énergie interne du système primitif et du calorimètre, $d\mathfrak{E}$ et $d\mathfrak{E}'$ les *travaux élémentaires observables* exercés par le système et le calorimètre, *soit sur l'extérieur, soit sur leur ensemble même, en tout ou partie*.

Dans la pratique, on pourra, par exemple, s'arranger en sorte que $d\mathfrak{E}' \equiv 0$, mais ceci n'est qu'accessoire.

Un système tel que défini par (14) est dit être *thermiquement isolé* et on peut étendre la notion à un nombre quelconque de systèmes comprenant un calorimètre, en sorte que l'on ait :

$$(15) \quad dQ_1 + dQ_2 + \dots + dQ_n = 0,$$

c'est-à-dire, sous forme développée :

$$(16) \quad (dU_1 + d\tilde{\mathfrak{U}}_1) + (dU_2 + d\tilde{\mathfrak{U}}_2) + \dots (dU_n + d\tilde{\mathfrak{U}}_n) = 0,$$

ou encore :

$$(17) \quad d(U_1 + U_2 + \dots + U_n) + (d\tilde{\mathfrak{U}}_1 + d\tilde{\mathfrak{U}}_2 + \dots + d\tilde{\mathfrak{U}}_n) = 0,$$

l'énergie interne étant, comme précédemment, supposée additive, aucune hypothèse supplémentaire n'étant nécessaire.

On remarquera que ceci conduit à concevoir :

$$(18) \quad \int_c (d\tilde{\mathfrak{U}}_1 + d\tilde{\mathfrak{U}}_2 + \dots + d\tilde{\mathfrak{U}}_n) = 0.$$

Le fait que l'expérience confirme, que par des adjonctions convenables de systèmes partiels, on doit pouvoir parvenir à une relation sous l'une ou l'autre forme équivalentes (17) ou (18) revient, comme nous allons le voir, à tout ce que l'analyse mathématique ordinaire (vis-à-vis de l'analyse fonctionnelle à une infinité de variables) peut comprendre du *second principe de la Thermodynamique*, les différentes propositions subséquentes ne dépendant plus que du développement des calculs, c'est-à-dire à partir d'une expression telle que :

$$(19) \quad dU + d\tilde{\mathfrak{U}} = 0,$$

où dU est une différentielle totale quelconque d'un certain nombre de variables et $d\tilde{\mathfrak{U}}$ une forme linéaire de différentielles.

En d'autres termes, cette équation (19) doit être considérée, en vue de notre objet, comme au moins aussi générale que l'équation (12); étant convenu que nous n'envisageons que des systèmes selon ce qui a été exposé, relativement auxquels cette proposition que nous venons d'énoncer est nécessaire.

Nous avons fréquemment invoqué, jusqu'à présent, la notion de cycle pour supporter nos raisonnements et nous allons précisément voir maintenant que, de deux choses l'une, ou bien, pour un système donné, il existe des *multiplicités intégrales lieux de cycles*, correspondant à certaines des multiplicités intégrales d'une équation telle que (12) ou (19), ou bien il n'y a pas de cycles possibles et des équations, telles que (12) ou (19), ne peuvent représenter exactement le système en question. Il n'y a donc pas eu de notre part de pétition de principe, en invoquant cette notion de cycle pour ainsi dire dès le début de la présente section.

Ainsi un des premiers objets du *second principe de la Thermodynamique* consistera à reconnaître l'existence des cycles et à préciser leur caractère analytique. En développant une relation écrite sous la forme (19) ou (18), c'est-à-dire en écrivant de façon détaillée les différentielles totales dU , on obtient une relation de la forme :

$$(20) \quad A_1 da_1 + A_2 da_2 + \dots + A_n da_n = 0,$$

où les A_i , a_i sont des fonctions des variables qui seront par hypothèse en nombre fini ⁽¹⁾.

(1) Nous référant, par exemple, à la forme (16) de l'équation équivalente (19), on observera que, du fait du développement des différentielles totales dU_i , le nombre des variables différenciées a_i peut être plus grand, qu'il n'en existe du fait de l'expression développée des $d\tilde{\mathfrak{U}}_i$.

Pour tous les cycles possibles et pouvant nécessiter certaines relations communes à ces cycles entre les variables, il est nécessaire, comme nous allons le montrer, que l'expression (20) admette un facteur intégrant.

Pour y parvenir, soient $a_2, a_{2+1}, \dots, a_N$, les variables qui demeurent effectivement indépendantes à l'occasion des cycles et éliminons, par exemple da_1 , soit :

$$da_1 = -\frac{A_2}{A_1} da_2 \dots - \frac{A_N}{A_1} da_N,$$

mais puisqu'en l'hypothèse on a pour tout cycle appartenant à la multiplicité $a_2 \dots, a_N$, $\int_c da_1 \equiv 0$, il faut donc que l'expression ci-dessus revienne à :

$$da_1 = \frac{\partial a_1}{\partial a_2} da_2 + \dots + \frac{\partial a_1}{\partial a_N} da_N,$$

$S(a_1, a_2, \dots, a_N)$ étant une certaine fonction, il faut donc que (20) soit équivalent à :

$$T dS = 0,$$

T étant une autre fonction, ce qui démontre la proposition en vue.

Il n'échappera pas que ce résultat peut impliquer de nombreuses équations, les unes dépendant de constantes arbitraires comme il en est de l'intégrale $S = C^te$, ci-dessus impliquée, et d'autres singulières, c'est-à-dire sans constantes arbitraires. Supposons, par exemple, que les *conditions du cycle* comprennent M équations indépendantes, du type $F_i = C^te$, ceci implique qu'en l'hypothèse, on ait :

$$A_1 da_1 + \dots + A_n da_N = G_1 dF_1 + \dots + G_M dF_M = 0.$$

Pour la même raison que précédemment, on aura, par exemple :

$$-\frac{G_2}{G_1} = \frac{\partial F_1}{\partial F_2}, \dots, -\frac{G_1}{G_M} = \frac{\partial F_1}{\partial F_M},$$

c'est-à-dire, qu'indépendamment de toute modalité particulière, on a pour tout *ensemble de cycles constituant un certain continuum*

$$(21) \quad A_1 da_1 + \dots + A_n da_N = T dS = 0.$$

D'un point de vue strictement analytique l'équation (21) peut s'écrire de bien des façons, il ne faudrait donc pas croire que les fonctions T et S soient ainsi, et dès maintenant, déterminées, l'étude systématique de cette question, que nous n'entreprendrons pas ici, conduirait à un développement entièrement formel de la thermodynamique et certainement à des aperçus nouveaux du plus haut intérêt. Une telle étude relève, comme on sait, du *problème de PFAFF* et de la *théorie des transformations de contact* ⁽¹⁾. Nous nous en tiendrons à ces quelques propositions qui se rattachent à ces doctrines que nous avons énoncées et allons compléter en vue de notre objet.

(1) On pourra consulter les chap. premier et II des *Leçons sur le problème de PFAFF* de M. Edouard GOURSAT et en connexion, le chap. X de la deuxième édition des *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre*, du même auteur. Du point de vue des applications, nous devons signaler une tentative de POINCARÉ dans un esprit toutefois assez différent de notre présente recherche. Cf. POINCARÉ, *Thermodynamique : extension du théorème de CLAUSIUS, deuxième méthode*, pp. 246 à 258.

Ayant donc établi que, pour tout cycle, l'équation prenait la forme (21) on peut se demander ce qu'il advient de la relation (20) pour toute transformation ne faisant pas partie d'un cycle.

La relation $S(a_1, a_2, \dots, a_N) = C^{\text{te}}$, répondant à l'équation (21) combinée avec d'autres relations éventuelles nécessaires, définissent ensemble une *multiplicité intégrale de l'équation de PFAFF* (20) ou (21) et on obtient ainsi, pour toutes les fonctions S qui y répondent et leurs fonctions nécessairement associées, toutes les multiplicités intégrales possibles, sur lesquelles les cycles, quels qu'ils soient, sont décrits; ces multiplicités intégrales étant des lieux de cycles. En particulier, toute multiplicité linéaire, quant à laquelle les variables, dont les $a_1, \dots, a_N$, seraient fonction d'une variable unique, est nécessairement tracée sur une des multiplicités intégrales à un nombre de dimensions plus élevé, dont nous venons de parler et fait, par conséquent, partie d'un cycle.

Pour s'en rendre compte, il suffit d'ailleurs de reprendre un raisonnement que nous avons fait un peu plus haut, en se plaçant dans le cas particulier de $N - 1$ relations indépendantes non toutes singulières entre les a_i et qui, en l'hypothèse présente et l'équation (20), doivent au moins exister; l'existence de multiplicités intégrales à un nombre plus grand de dimensions étant admise.

Nous pouvons maintenant répondre à la question soulevée.

Les transformations non cycliques ne peuvent satisfaire à l'équation (20) quelle qu'elle soit et ne sont donc pas justiciables d'une description dépendant d'un nombre fini de variables

COROLLAIRE : *au sens de ce qui précède, ni la forme linéaire de différentielles dQ , qui exprime la quantité de chaleur ni, à fortiori, la différentielle totale dU de l'énergie n'ont été définies jusqu'à présent, c'est-à-dire analytiquement, autrement qu'en ce qui concerne strictement les transformations cycliques c'est-à-dire les transformations réversibles au sens de la Thermodynamique.*

Ces définitions en question ne sont donc pas exactement valables dans le cas de transformations irréversibles et ne peuvent constituer que des approximations analytiques plus ou moins divergentes ou plus ou moins approchées, selon les cas.

I-3 Nous consacrerons ce paragraphe à un rappel des notions fondamentales et élémentaires de la Thermodynamique que nous situerons par rapport aux propositions générales dont l'établissement a fait l'objet des paragraphes précédents.

On sait, en Thermodynamique expérimentale, que si la notion de réversibilité peut paraître liée dans une certaine mesure à celle de la lenteur des transformations, ce point de vue est, *a priori*, beaucoup trop étroit : *Une transformation est dite réversible si elle fait partie d'un cycle* (au sens que nous avons défini) et que, par conséquent, le retour à l'état initial est possible (sans qu'il subsiste par ailleurs d'altérations)

Cette question de la lenteur des transformations comme pouvant conditionner, dans une certaine mesure, la réversibilité de ces transformations doit précisément dépendre, dans chaque cas, des principes qui serviront à l'étudier ensuite et n'en doivent pas, eux, dépendre quant aux définitions; comme l'a nettement posé Max PLANCK dans sa *Thermodynamique*, cette restriction, *a priori*, imposant la lenteur aux transformations, n'a aucun rôle utile à jouer dans la définition théorique de la réversibilité. C'est, entre autres, ce que nous avons pensé contribuer à pouvoir mieux faire saisir jusqu'à présent en mettant, en quelque sorte, en évidence l'ossature analytique de cette discipline particulière : la *Thermodynamique*.

Maintenant, et quant au résultat fondamental que nous avons établi et qu'exprime l'équation (21) et ses conséquences, nous avons dit quelle incertitude pesait sur la détermination des fonctions T et S mises en évidence. La Thermodynamique expérimentale permet de lever cette indétermination au moyen de considérations simples qui, pensons-nous, se ramènent à la notion d'*indépendance* ou d'*additivité*, de systèmes partiels, combinée avec celle d'un *équilibre thermique déterminé et commun aux parties* (principe des températures égales). On sait que T est la *température absolue* qu'on peut évaluer directement dans des intervalles étendus au moyen de la pression à volume constant de tout gaz ou de toute vapeur, c'est-à-dire de toute matière à température suffisamment élevée et rapportée dans les conditions usuelles de la pratique aux gaz difficilement liquéfiables puis étendue, *analytiquement*, ensuite, à tout intervalle au moyen des principes que nous avons exposés et des propriétés des substances; dans la mesure, bien entendu, où ces propriétés en question peuvent être analytiquement exprimées comme il doit en être des principes eux-mêmes, au sens que nous avons mis en évidence.

Relativement à une équation telle que (21) on pourra, par une définition qui se comprend d'elle-même, en fonction de ce que nous avons établi, dire par exemple qu'elle s'applique à un système décomposable en *trois systèmes indépendants* si, du point de vue de la recherche des multiplicités intégrales, elle peut s'écrire :

$$(22) \quad T_1 dS_1 + T_2 dS_2 + T_3 dS_3 = 0,$$

étant entendu que l'indépendance en question implique qu'on puisse annuler séparément dS_1 , dS_2 ou dS_3 et varier le système partiel correspondant, c'est-à-dire à $S_1 = C^{te}$, $S_2 = C^{te}$ ou bien $S_3 = C^{te}$, et cela quelles que soient les valeurs des constantes arbitraires ci-dessus.

Utilisant un raisonnement employé par POINCARÉ que nous nous contentons de reproduire ci-après ⁽¹⁾ ces conditions s'exprimeront analytiquement par :

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{T_1}{T_2} = e^{X_3}, \quad \frac{T_2}{T_3} = e^{X_1}, \quad \frac{T_3}{T_1} = e^{X_2}, \end{array} \right.$$

X_1 , X_2 , X_3 étant des fonctions de S_1 , S_2 , S_3 satisfaisant donc à :

$$(24) \quad X_1 + X_2 + X_3 = 0$$

et puisque $\frac{T_1}{T_2}$ doit être, en l'hypothèse, indépendant de S_3 , *mutatis mutandis* pour les autres rapports, on a :

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial S_1} = \frac{\partial X_2}{\partial S_2} = \frac{\partial X_3}{\partial S_3} = 0. \end{array} \right.$$

De (24) et (25) on tire :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 X_3}{\partial S_1 \partial S_2} = \frac{\partial^2 X_1}{\partial S_2 \partial S_3} = \frac{\partial^2 X_2}{\partial S_3 \partial S_1} = 0, \end{array} \right.$$

1. Voir POINCARÉ, *Thermodynamique*, deuxième édition, p. 253.

d'où :

$$(27) \quad \begin{cases} X_1 = \varphi_2(S_2) - \psi_3(S_3), & X_2 = \varphi_3(S_3) - \psi_1(S_1), & X_3 = \varphi_1(S_1) - \psi_2(S_2), \end{cases}$$

les équations (27) tenant compte de (23), deviennent :

$$\begin{cases} \text{Log } T_1 - \varphi_1(S_1) = \text{Log } T_2 - \varphi_2(S_2) = \text{Log } T_3 - \varphi_3(S_3) = \text{Log } T, \end{cases}$$

de sorte qu'on a finalement, pour (22)

$$(28) \quad T [e^{\varphi_1(S_1)} dS_1 + e^{\varphi_2(S_2)} dS_2 + e^{\varphi_3(S_3)} dS_3],$$

T étant une fonction positive. Substituant S à $\int e^{\varphi(S)} dS$, on voit qu'on a finalement à considérer l'équation :

$$(29) \quad T d(S_1 + S_2 + S_3) = 0,$$

où T, avons-nous dit, est la *température absolue* et les expressions S_i :

$$(30) \quad S_i = \int \frac{dQ_i}{T_i},$$

ainsi qu'il résulte de la construction même, certaines fonctions des variables du système partiel, c'est-à-dire l'*Entropie* de ces systèmes. Nous venons de voir à quelles conditions l'*Entropie* était additive.

On peut encore imaginer différents états réversibles d'un système répondant à (19) ou (20) et qui soient séparés par des états irréversibles, c'est-à-dire que ni (19) ni (20) ne seraient vérifiés au passage.

On démontre, en Thermodynamique expérimentale, du moins tant que l'énergie cinétique coordonnée dont nous n'avons pas tenu compte ici est négligeable, que la fonction $S = S_1 + S_2 + S_3 + \dots$, chaque terme étant défini par (30), à l'occasion de transformations réversibles, croît d'un état réversible au suivant, en passant par les transformations irréversibles en question, sans pouvoir décroître tant que le système considéré, auquel S s'applique, demeure isolé. Ceci étant une conséquence du fait de l'écoulement unidirectionnel de la chaleur quand elle n'est pas accompagnée de travail, c'est-à-dire de l'*axiome de CLAUSIUS*, soit donc :

$$\delta S > 0.$$

La relation $dQ_i = T_i dS_i$, tirée de (30), n'a plus lieu en général, comme nous l'avons démontré rationnellement; rappelons que l'on a seulement l'inégalité :

$$dQ_i < T_i dS_i^{(1)}.$$

Là encore, et sans avoir à nous y étendre, on perçoit les limites d'une représentation analytique des systèmes et de leurs transformations et on est ainsi amené à comprendre, par ce moyen particulier, comment certaines approximations peuvent être conduites avec plus ou moins de succès au moyen des fonctions de l'analyse.

(1) dQ_i a alors une signification physique et ne saurait plus être représentée, comme nous l'avons démontré, fût-ce par une forme linéaire de différentielles.

CHAPITRE II

LE PARADOXE DE M. MARIUS AUBERT

Il s'agit de la *compression adiabatique incontrôlée d'un gaz, aussi ample que l'on voudra et au moins assez ample pour que cette compression ne soit pas voisine d'une isentropique* (fig. 1).

Soit un gaz parfait, renfermé dans un corps de pompe, au moyen d'un piston mobile. On admet qu'aucun échange de chaleur ne peut avoir lieu entre le gaz et les

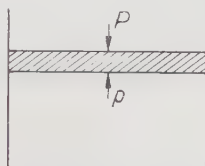


Fig. 1.

solides limitants. A l'origine, le piston convenablement surchargé est bloqué, puis on débloque soudainement et on abandonne le système à lui-même.

M. Marius AUBERT applique le principe de l'équivalence. La pression initiale du gaz étant p_0 et la pression finale $P > p_0$, soit T_0 et T_1 les températures absolues initiales et finales, v_0 et v_1 les volumes initial et final, $v_0 > v_1$, le travail effectué par les poids contre le système sera égal à :

$$P (v_0 - v_1).$$

Appliquant le *principe de l'équivalence*, ce travail devra, pour un gaz parfait, être égal à la quantité de chaleur qu'il faudrait céder au gaz pour le porter de T_0 à T_1 à volume constant, soit (en unités homogènes) :

$$c (T_1 - T_0),$$

d'où la relation indiquée par M. Marius AUBERT d'après G. Robin (1) :

$$(1) \quad P v_1 + c T_1 = P v_0 + c T_0.$$

Il n'y a plus qu'à introduire l'équation d'état

$$p v = (C - c) T$$

c'est-à-dire, en l'espèce, quant à l'état initial et à l'état final :

$$(2) \quad \begin{cases} P_0 v_0 = (C - c) T_0, \\ P v_1 = (C - c) T_1 \end{cases}$$

pour parvenir à :

$$(3) \quad \frac{P}{P_0} = \frac{c}{C} \frac{\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}}{\frac{1}{C} - \frac{1}{C}}$$

tel est le résultat indiqué par M. Marius AUBERT.

En particulier, pour un gaz monoatomique $\frac{C - c}{C} = \frac{2}{5}$ et $\frac{C - c}{C} = \frac{2}{7}$ pour un gaz diatomique.

Ce résultat qui, par exemple, pour un gaz diatomique, donnerait une pression P infinie pour $\frac{v_1}{v_0} = \frac{2}{7}$ peut paraître, à première vue, paradoxal mais il ne l'est nullement à la réflexion comme nous allons le faire comprendre.

On peut, d'abord, observer que la formule (3) de M. Marius AUBERT implique seulement une relation nécessaire entre l'état initial et l'état final et *qui n'est nullement nécessaire au cours du mouvement*, c'est-à-dire pour un volume v quelconque (au lieu de v_1).

Il n'est donc ni contraire aux principes ni exclu qu'au cours du mouvement on puisse avoir :

$$\frac{v}{v_0} < \frac{C - c}{C}.$$

La relation (3) n'existant plus au cours du mouvement, cette limite en apparence infranchissable du rapport des volumes, ne se rencontre donc pas en réalité.

Basé uniquement, avons-nous dit, sur le principe de l'équivalence, le raisonnement de M. Marius AUBERT est absolument inattaquable, en l'hypothèse préalable, étant admise la notion de gaz parfait, ce qui est légitime mais, comme nous venons de le montrer, ce raisonnement ne nous fournit aucun renseignement quant aux états intermédiaires entre l'état initial et l'état final.

La formule (3) indique un accroissement considérable d'entropie; on a en effet,

$$S_1 - S_0 = - c \operatorname{Log} \left[\gamma \left(\frac{v_1}{v_0} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} \right) \left(\frac{v_0}{v_1} \right)^\gamma \right].$$

différence qui tend vers l'infini quand v_0/v_1 , tend vers $\gamma/(\gamma - 1)$, au repos final.

(1) Gustave Robin, *Œuvres Scientifiques*, réunies et publiées sous les auspices du ministère de l'Instruction publique, par Louis Raffy, Professeur à la Faculté des Sciences de Paris, Gauthier-Villars (1901).

C'est donc que le mouvement, pour cette même valeur du rapport v_0/v_1 , permet à l'entropie totale du fluide de demeurer finie.

L'équation (1) s'écrit encore :

$$(4) \quad \int_{v_0}^{v_1} (du + Pdv) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$u_1 - u_0 + P (v_1 - v_0) = 0,$$

d'où :

$$P (v_1 - v_0) + c (T_1 - T_0) = 0.$$

La mécanique rationnelle, en l'espèce le principe des forces vives, nous fournit une autre relation qui n'est pas discutable. Soit m la masse du piston, surcharges comprises, V la vitesse à tout instant de cette masse, p la pression du gaz à l'instant t ; nous avons, à tout instant, la relation :

$$(5) \quad - (P - p) dv = d \left(\frac{mV^2}{2} \right).$$

Portant dans (4), on a

$$(6) \quad \int_{p_0, v_0}^{P, v_1} dU + p dv = 0.$$

La pression p se propage très rapidement et, si la vitesse du piston n'est pas comparable à la vitesse du son dans le fluide, la pression est sensiblement uniforme dans le cylindre.

Divisant alors la masse en tranches de volume spécifique ou température déterminés et de masses $d\mu$, telles que $\int_0^1 d\mu = 1$, pour fixer les idées, ceci permet encore d'écrire l'équation (6) comme suit :

$$(7) \quad \int_{p_0, v_0}^{P, v_1} \int_0^1 T_\mu dS_\mu d\mu = 0,$$

T_μ et $S_\mu d\mu$ étant la température et l'entropie d'une masse $d\mu$.

L'équation (7) d'adiabatisation globale permet cependant de supposer que les tranches échangent de la chaleur entre elles.

Alors si l'on écrit, pour une quelconque, l'inégalité de Clausius :

$$(8) \quad dq_\mu \leq T_\mu dS_\mu d\mu,$$

ayant :

$$(9) \quad \int_\mu dq_\mu = 0,$$

on peut montrer que (8) ne peut être vérifiée pour toutes les tranches et que l'inégalité de Clausius se renverse, au moins par certaines tranches à certains moments.

Portant en effet (8) dans (7) en vertu de (9), cette intégrale serait positive, ce qui est impossible, à moins d'avoir constamment l'égalité dans (8), ce qui est encore impossible puisque l'entropie croît finalement.

CHAPITRE III

PRÉLIMINAIRES A L'ÉTUDE DES MOUVEMENTS D'UN MILIEU CONTINU ET DE LA VISCOSITÉ

III-1 Si nous considérons une masse matérielle plastique quelconque *en état de régime permanent*, comprise entre certaines surfaces de courant invariables et fermées, qui seront en général multiples connexes et sur lesquelles s'exerceront uniquement *des forces de contact*, les sommes des quantités de mouvement projetées demeurant constantes ainsi que les sommes des moments par rapport aux axes de ces quantités de mouvement, les théorèmes généraux du mouvement intérieur ainsi défini, nous indiquent que la résultante générale et le moment résultant des forces de contact sur ces surfaces limitantes en question, sont égales et directement opposées à la résultante et au moment résultant des autres forces extérieures appliquées aux éléments de la masse.

Dans la mesure où les résultantes de ces forces massiques seront nulles, il en sera de même des résultantes correspondantes des forces de contact. En ce sens, et en convenant d'une direction appropriée, quant aux normales aux surfaces simples fermées et frontières partielles, on pourra dire qu'il y a transmission de la résultante ou du moment résultant des forces de contact entre ces surfaces limitantes fermées simplement connexes. Il n'en sera pas de même, évidemment, pour la puissance motrice, qui est en général partiellement absorbée par le milieu et ceci correspond d'ailleurs à ce que nous avons exposé à propos des principes de la Thermodynamique. Nous nous proposons donc d'analyser les propositions qui ont fait l'objet de ce paragraphe afin d'en préciser le mécanisme et les modes d'application.

III-2 Nous rappellerons rapidement que si l'on considère un élément de surface dS d'un milieu continu, dont la normale a pour cosinus directeurs α, β, γ , l'effort intérieur, compté dans un sens de cette normale, a pour composantes, respectivement aux axes rectangulaires, $\overline{Ox}, \overline{Oy}, \overline{Oz}$:

$$T_x dS, \quad T_y dS, \quad T_z dS.$$

Des considérations bien connues relatives à l'équilibre dynamique d'un tétraèdre de matière, quant auxquelles intervient le principe des quantités de mouvements projetées, donnent :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_x = \alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3 \\ T_y = \alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3 \\ T_z = \alpha Z_1 + \beta Z_2 + \gamma Z_3, \end{array} \right.$$

les neuf fonctions X_i, Y_i, Z_i étant des fonctions du point (x, y, z) , où se trouve l'élément dS considéré et dont la signification géométrique est bien connue.

Désignant par X, Y, Z les composantes des forces extérieures par unité de masse en un point déterminé, u, v, w , étant les composantes du vecteur vitesse V en un point, ρ la masse spécifique en ce point, *le théorème des quantités de mouvement projetées*, déjà utilisé pour établir (1) conduit, au moyen de ces expressions mêmes, au système général

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho \left(X - \frac{du}{dt} \right) = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z}, \\ \rho \left(Y - \frac{dv}{dt} \right) = \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} + \frac{\partial Y_3}{\partial z}, \\ \rho \left(Z - \frac{dw}{dt} \right) = \frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z}. \end{array} \right.$$

Si l'on introduit ensuite *le théorème relatif aux sommes des moments de quantité de mouvement*, on sait que :

$$Y_3 - Z_2 = T_1, \quad Z_1 - X_3 = T_2, \quad X_2 - Y_1 = T_3$$

et on complète la nouvelle notation par :

$$X_1 = N_1, \quad Y_2 = N_2, \quad Z_3 = N_3,$$

les neuf fonctions primitives se réduisent à six, avec les relations correspondantes que l'on imagine et plus particulières que (1) et (2) que nous aurons d'ailleurs l'occasion de retrouver à l'occasion de nos recherches.

III-3 Considérons maintenant les expressions suivantes des projections de la résultante générale et du moment résultant de *l'effort intérieur*, soient :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \xi = \iint T_x dS, & \eta = \iint T_y dS, & \zeta = \iint T_z dS, \\ \lambda = \iint (yT_z - zT_y) dS, & \mu = \iint (zT_x - xT_z) dS & \nu = \iint (xT_y - yT_x) dS, \end{array} \right.$$

étendues à l'ensemble des surfaces limitantes.

On a, par exemple, pour ξ , appliquant la formule de GREEN et d'après (2) :

$$\xi = \iiint (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3) dS = \iiint \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} \right) d\tau = \iiint \rho \left(X - \frac{du}{dt} \right) d\tau$$

posant encore :

$$\iiint \rho X d\tau = R_x,$$

sachant qu'en régime permanent :

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z},$$

il vient :

$$\begin{aligned} \zeta - R_x &= - \iiint \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) d\tau = \\ &= - \iint \rho u (\alpha u + \beta v + \gamma w) dS + \iiint u \operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) d\tau. \end{aligned}$$

Mais, sur une surface de courant, la vitesse étant dans le plan tangent :

$$\alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

d'autre part, l'équation de continuité implique :

$$\operatorname{div} (\rho \mathbf{V}) = 0,$$

et, semblablement pour les autres composantes. En définitive, nous avons :

$$(3) \quad \zeta - R_x = 0, \quad \eta - R_y = 0, \quad \zeta - R_z = 0,$$

où R_x, R_y, R_z représentent la résultante des forces extérieures; quant à la composante v , par exemple, soit :

$$\begin{aligned} v &= \iint (x T_y - y T_x) dS = \iint [x (\alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3) - y (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3)] dS = \\ &= \iiint \left[\frac{\partial}{\partial x} (x Y_1 - y X_1) + \frac{\partial}{\partial y} (x Y_2 - y X_2) + \frac{\partial}{\partial z} (x Y_3 - y X_3) \right] d\tau \end{aligned}$$

effectuant, en tenant compte de (2) :

$$v = \iiint \rho \left[x \left(Y - \frac{dv}{dt} \right) - y \left(X - \frac{du}{dt} \right) \right] + (Y_1 - X_2) d\tau,$$

posant :

$$\mathcal{N}_z = \iiint \rho (xY - yX) d\tau,$$

nous imposerons, en outre, que $Y_1 - X_2 = 0$ et développant :

$$\left\{ \frac{du}{dt} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{dv}{dt} = u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}, \right.$$

il vient :

$$\begin{aligned} v - \mathcal{N}_z &= - \iiint \rho \left[x \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) - y \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] d\tau = \\ &= - \iint \rho (vx - uy) (\alpha u + \beta v + \gamma w) dS + \iiint [v \operatorname{div} (\rho x \mathbf{V}) - u \operatorname{div} (\rho y \mathbf{V})] d\tau. \end{aligned}$$

Nous avons toujours, d'une part, $\alpha u + \beta v + \gamma w = 0$, et d'autre part :

$$v \operatorname{div} (\rho x V) - u \operatorname{div} (\rho y V) = (vx - uy) \operatorname{div} (\rho V) = 0.$$

En définitive, nous avons, pour les composantes λ, μ, ν :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda - \mathcal{D}\lambda_x = 0, \quad \mu - \mathcal{D}\lambda_y = 0, \quad \nu - \mathcal{D}\lambda_z = 0. \end{array} \right.$$

Nous retiendrons que nous avons fait intervenir les conditions :

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_3 = Z_2, \quad Z_1 = X_3, \quad X_2 = Y_1, \end{array} \right.$$

qui expriment le principe de conservation des sommes de moments de quantité de mouvement et rendent symétrique la tenseur des efforts :

$$\left| \begin{array}{ccc} N_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & N_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & N_3 \end{array} \right|.$$

Nous avons également supposé la dérivabilité des fonctions en jeu. Anticipant quelque peu, nous aurons l'occasion, au cours de ce travail, de constater précisément que les dérivations en question peuvent venir à faire défaut au sein même du milieu et, qu'au moins, quant à une catégorie importante de milieux, celle des liquides visqueux, les vitesses mêmes, en général, doivent être envisagées comme étant discontinues aux limites, c'est-à-dire au contact des solides limitants.

Cette affirmation absolument contraire à l'opinion jusqu'à présent reçue est, comme nous le montrerons, une nécessité analytique qui tient à ce processus de représentation et ne préjuge en rien des faits physiques.

IV-4 Nous allons maintenant établir analytiquement un résultat d'une importance capitale et qui, nous pensons par la suite le bien montrer, bien que connu en principe, n'a été ni simplement établi avant nous et encore moins convenablement interprété. Il s'agit précisément de ce en quoi l'objet de la présente section touche à la *Thermodynamique*, nous voulons dire au principe de la conservation de l'énergie.

Nous considérons l'énergie transformée (par unité de temps) dans la masse même du fluide continu considéré, du fait des actions superficielles sur ses propres limites; c'est-à-dire que V étant le vecteur vitesse, nous envisageons ses composantes u, v, w , attachées aux particules fluides situées sur la surface de courant limitante même et qui la constituent. Du fait de ce mouvement il se développe un effort unitaire T du fluide sur l'extérieur et le travail reçu par le fluide sera donc :

$$\begin{aligned} (5) \quad & - \iint VT \cos (V, T) dS = - \iiint [(uX_1 + vY_1 + wZ_1) \alpha + (uX_2 + vY_2 + wZ_2) \beta + \\ & \quad + (uX_3 + vY_3 + wZ_3) \gamma] dS \\ & = - \iiint \left[\left(X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial v}{\partial x} + Z_1 \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \left(X_2 \frac{\partial u}{\partial y} + Y_2 \frac{\partial v}{\partial y} + Z_2 \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\ & \quad \left. + \left(X_3 \frac{\partial u}{\partial z} + Y_3 \frac{\partial v}{\partial z} + Z_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] d\tau \\ & = - \iiint \left[u \left(\frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} + \frac{\partial X_3}{\partial z} \right) + v \left(\frac{\partial Y_1}{\partial z} + \frac{\partial Y_2}{\partial x} + \frac{\partial Y_3}{\partial z} \right) + w \left(\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial Z_2}{\partial y} + \frac{\partial Z_3}{\partial z} \right) \right] d\tau. \end{aligned}$$

Désignant par I la dernière intégrale, ci-dessus, celle-ci s'écrira encore en vertu des équations générales (2) :

$$I = \iiint \rho \left[u \left(X - \frac{du}{dt} \right) + v \left(Y - \frac{dv}{dt} \right) + w \left(Z - \frac{dw}{dt} \right) \right] d\tau.$$

Désignant par $\mathfrak{E}$ le travail des forces extérieures, c'est-à-dire :

$$\mathfrak{E} = \iiint \rho (uX + vY + wZ) d\tau,$$

développant l'accélération, comme il a été indiqué, on a :

$$\begin{aligned} I - \mathfrak{E} &= - \iiint \rho \left[u \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial x} + w \frac{\partial w}{\partial x} \right) + v \left(u \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \right. \\ &\quad \left. + w \left(u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial z} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] d\tau \\ &= - \iint \rho \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} (\alpha u + \beta v + \gamma w) dS + \iiint \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} \operatorname{div} (\rho V) d\tau = 0, \end{aligned}$$

d'où en définitive :

$$\begin{aligned} (6) \quad \mathfrak{E} &= \iint VT \cos (V, T) dS \\ &= - \iiint \left[X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + X_2 \frac{\partial u}{\partial y} + X_3 \frac{\partial u}{\partial z} + Y_1 \frac{\partial v}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial v}{\partial y} + Y_3 \frac{\partial v}{\partial z} + \right. \\ &\quad \left. + Z_1 \frac{\partial w}{\partial x} + Z_2 \frac{\partial w}{\partial y} + Z_3 \frac{\partial w}{\partial z} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Comme nous le verrons, dans le cas des liquides visqueux, cette expression conduit, par simple substitution de leurs expressions particulières aux X_1, Y_1, Z_1 à la *fonctionnelle de Lord RAYLEIGH*. Telle est en général l'expression des travaux (par unité de temps) des forces extérieures tant superficielles que massiques qui se dissipent dans un milieu continu en régime permanent.

Les hypothèses de dérivabilité ont été mises en évidence et, comme nous le verrons, il est primordial de remarquer qu'en fonction de l'impossibilité de ces hypothèses cette expression pourra ne pas être applicable à un système, limites solides comprises, alors qu'elle s'appliquera au fluide même, compris entre ces limites.

Vu les conséquences très contraires aux opinions jusqu'à présent reçues que nous en tirerons pour les liquides visqueux, nous pensons que l'utilité de cette remarque précise et inattaquable, que nous venons de faire, n'avait pas encore été bien saisie jusqu'à présent.

Lorsque les forces extérieures dérivent d'un potentiel, nous allons montrer que $\mathfrak{E}$ est nul (en l'hypothèse faite du mouvement permanent).

Φ étant ce potentiel nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \iiint \rho \left(u \frac{\partial \Phi}{\partial x} + v \frac{\partial \Phi}{\partial y} + w \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right) d\tau \\ &= \int \rho \Phi (\alpha u + \beta v + \gamma w) dS - \iiint \Phi \operatorname{div} (\rho V) d\tau = 0. \end{aligned}$$

Le second membre de (6) représente alors l'énergie *dissipée dans la masse fluide*, du fait unique de l'action des forces de contact.

Ainsi, dans ce cas où les forces extérieures dérivent d'un potentiel et supposant, pour fixer les idées, que la masse soit contenue entre deux surfaces, l'une étant intérieure à l'autre, l'expression (5) des travaux superficiels peut être entendue, pour une détermination convenable du sens des normales aux surfaces limitantes, *comme la différence de deux puissances reçue par l'une des surfaces et transmise par l'autre*.

Ainsi encore, lorsque les vitesses u, v, w , seront discontinues sur les surfaces limitantes en question, les intégrales pouvant avoir un sens au voisinage immédiat et de part et d'autre des surfaces de discontinuité, l'intégrale (5) devra toujours être considérée comme prise dans le fluide même où u, v, w seront déterminées et *ceci amènera nécessairement à la considération, au moins virtuelle, d'une puissance dissipée dans les couches de passage que nous venons, ipso facto, de définir*.

En tout état d'hypothèse l'expression (5) représentera, avons-nous dit, la puissance absorbée par le milieu continu et qui pourra donc ne pas coïncider avec la puissance dissipée par le système (couches de passage comprises).

III-5 Les intégrales relatives à la résultante et au moment résultant des forces de contact $\xi, \eta, \zeta, \lambda, \mu, \nu$, n'ont évidemment de sens physique immédiat que si elles sont prises relativement à une masse déterminée, c'est-à-dire sur des surfaces de courant fermées et sur le volume délimité par ces surfaces. Elles n'en ont pas moins analytiquement un sens en elles-mêmes quel que soit leur champ.

Si une telle considération ne paraît pas devoir présenter d'application immédiate utile dans le cas de l'emploi des équations générales du type (2), contenant les accélérations, nous allons voir qu'elle peut être au contraire d'une *importance décisive* quand on peut négliger ces termes, c'est-à-dire quand on considère *les équations linéarisées*. Nous supposons encore que les forces autres que les forces de contact se réduisent à la pesanteur dirigée selon l'axe Oz . Aucune confusion de notation n'étant plus possible, nous substituerons aux expressions $\xi, \eta, \zeta; \lambda, \mu, \nu$, des composantes, les nouvelles notations $X, Y, Z; L, M, N$, c'est-à-dire que R_x, R_y étant nulles :

$$X = \iiint (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3) dS, \dots,$$

$$N = \iiint [x (\alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3) - y (\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3)] dS$$

et nous considérerons, *in abstracto*, ces intégrales prises sur une *surface quelconque* et même, aussi bien ouverte que fermée.

En se reportant aux calculs antérieurement faits, où il suffira d'annuler ρ , on voit que, pour une surface fermée à l'intérieur de laquelle les conditions de dérivabilité impliquées sont satisfaites, les intégrales sont nulles.

X, Y, Z, L, M, N se réduisent alors, en général, à *des fonctions de ligne*.

Si l'on se limite encore à la considération de *mouvements identiques dans tous les plans horizontaux*, on est amené à envisager :

$$X = \int (\alpha X_1 + \beta X_2) d\sigma, \quad Y = \int (\alpha Y_1 + \beta Y_2) d\sigma,$$

$$N = \int [x (\alpha Y_1 + \beta Y_2) - y (\alpha X_1 + \beta X_2)] d\sigma.$$

Les intégrales curvilignes étant prises sur les sections droites d'arc σ des cylindres correspondants : X, Y, N étant rapportées conventionnellement à l'unité de longueur suivant $\overline{Oz}$.

Les expressions ci-dessus peuvent encore s'écrire et de façon détaillée :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \int_{x_0, y_0}^{x, y} X_1 dy - X_2 dx, \quad Y = \int_{x_0, y_0}^{x, y} Y_1 dy - Y_2 dx. \end{array} \right.$$

$$(8) \quad N = \int_{x_0, y_0}^{x, y} (xY_1 - yX_1) dy - (xY_2 - yX_2) dx,$$

qui sont alors des intégrales de différentielles totales, c'est-à-dire des *fonctions de point*. C'est d'ailleurs ce que nous allons vérifier pour parvenir immédiatement à une remarque importante concernant le moment résultant N.

Pour X et Y, la vérification résulte du système :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} = 0, \end{array} \right.$$

qui n'est autre que le système (2) linéarisé et rapporté aux mouvements plans considérés.

Quant à N la condition s'exprime par :

$$\frac{\partial}{\partial x} (xY_1 - yX_1) + \frac{\partial}{\partial y} (xY_2 - yX_2) = 0,$$

qui, en vertu de (9), revient à :

$$(10) \quad Y_1 - X_2 = 0,$$

que nous avons antérieurement admise comme suffisante, en fonction du résultat à obtenir mais *qui devient ici nécessaire pour que N soit également une fonction de point*.

CHAPITRE IV

LA VISCOSITÉ

IV-1 A partir de cette section, nous allons pénétrer dans un domaine beaucoup plus difficile et qui a trait, en gros, aux difficultés qui surgissent à l'occasion de l'application *du principe de la conservation des moments de quantité de mouvement* qui, comme on sait, est une conséquence rationnelle *du principe de l'égalité de l'action à la réaction*.

Au cours de nos Chapitres I et II nous avons traité de l'extension *du principe des forces vives*, ce en quoi consiste précisément la *Thermodynamique*, dont le développement expérimental est bien établi. Ici, au contraire, c'est à peine si certaines des contradictions, cependant *énormes* que nous allons examiner, ont été définitivement enregistrées; les plus importantes de ces contradictions n'ont même pas encore été reconnues et rien de ce qui les concerne n'a pu être expliqué jusqu'à maintenant. En tout état de cause, il n'existe d'ailleurs, jusqu'à présent, aucune extension théorique et expérimentale pouvant servir de guide, comme il en était pour les questions étudiées précédemment.

Relativement, à l'écoulement d'une substance continue, plus précisément d'un liquide visqueux, un des préjugés qui, nous le pensons, à fait dévier les recherches, et de façon malencontreuse, est bien celui qui, consiste à vouloir, *a priori*, que la vitesse du liquide soit nécessairement et par continuité la même que celle des solides limitants au contact. Ce principe, comme nous allons l'établir, est au moins *rationnellement contradictoire* avec l'hypothèse du mouvement à trois dimensions effectives.

Ainsi que l'a signalé d'ailleurs COUETTE (1) les initiateurs de la doctrine, NAVIER et KIRCHOFF, ne considéraient nullement cette hypothèse de continuité comme s'imposant; il est donc à penser que ce sont les deux premiers problèmes qui ont été résolus en faisant usage des *équations linéarisées de STOKES*, nous voulons parler de l'écoulement permanent d'un liquide dans un tube capillaire et de la chute à vitesse constante d'une sphère dans un espace visqueux indéfini qui, du fait que ces *écoulements à deux dimensions* s'accommodent de cette hypothèse et que l'accord avec l'expérience a pu être constaté dans un domaine assez étendu, ont ainsi conduit à une généralisation hâtive et injustifiée que nous entendons critiquer en premier lieu.

1. Voir COUETTE, *thèse*.

Cette hypothèse de la continuité de la vitesse aux limites ayant été appliquée également, il faut le dire, au problème d'une sphère tournant dans une enveloppe sphérique concentrique fixe, qui conduit à la formule dite classique et bien connue, c'est-à-dire :

$$M = 8\pi\eta\omega_0 \frac{R_e^3 R_i^3}{R_e^3 - R_i^3},$$

où ω_0 est la vitesse angulaire de la sphère mobile intérieure, de rayon R_i ; R_e étant celui de l'enveloppe sphérique fixe et η le coefficient de viscosité et, tout au contraire, de ce qui s'était passé pour la chute de la sphère, cette formule fut d'abord violemment contredite par l'expérience, ainsi qu'il résulte des recherches d'Amédée GUILLET qui conclut le premier à quelque déficience de la théorie préalable classique qui aboutit à la formule précitée (1).

Assez paradoxalement, alors que l'hypothèse criticable continuait d'avoir cours et de servir à l'occasion de recherches théoriques de mathématiques pures touchant à ces questions, ce furent les continuateurs du regretté Professeur Amédée GUILLET, qui eux ne croyaient pas à cette nécessité, supposée inéluctable de la continuité des vitesses aux limites qui, pour la première fois, parvinrent à observer expérimentalement le couple classique cependant depuis longtemps calculé, qu'implique cette continuité même en précisant, bien entendu, les conditions exceptionnelles de sa réalisation (2).

Il résulte donc de nos recherches mathématiques que nous exposerons pour ce qui est des mouvements plus généraux d'un liquide visqueux, c'est-à-dire impliquant des trajectoires non planes, que l'égalité de la vitesse du liquide à celle de la surface solide au contact immédiat est *une impossibilité analytique qui découle des équations mêmes que l'on admet* et ceci qu'il s'agisse des équations de NAVIER non linéaires ou de leur forme linéarisée d'après STOKES.

Nous savons parfaitement que les équations de la viscosité en particulier quand elles sont réduites à leur forme linéarisée, comme les équations dites de STOKES ou de STOKES-OSEEN ont fait l'objet d'un problème de DIRICHLET-NEUMANN généralisé et dont l'intégration dépend d'une extension de la notion de potentiel de simple ou de double couche (3); nous pensons que les développements que nous allons immédiatement entreprendre feront saisir en quel sens on peut dire que les résultats généraux issus de ces théories mathématiques peuvent être illusoire.

Pour tout dire, ce sont des théorèmes d'existence en fonction de conditions aux limites supposées données, *a priori*, mais comme nous le verrons, on ne sait trop comment on pourrait réaliser ces conditions aux limites, sous leur forme la plus générale envisagée, ni même, ce qui serait plus grave, si on a bien le droit de se donner des conditions aux limites continues arbitraires sur la surface même du fluide, c'est-à-dire sans introduire implicitement quelque contradiction éventuelle.

Ce préambule permettra de bien voir comment nos recherches personnelles se raccordent aux recherches antérieures : savoir que, les équations déduites de la méca-

(1) A. GUILLET C. R 1935, 200, p. 442 et 1522.

(2) Jacques HUETZ, *Contribution à l'étude expérimentale des phénomènes anormaux en Mécanique des fluides visqueux* C. R. T. 223, pp. 534-535; et du même auteur : *Sur l'existence de plusieurs régimes où les forces de viscosité sont linéaires en fonction de la vitesse*, C. R. T. 224, pp. 1205-1207.

H. DU BOSQ DE BEAUMONT, *Essai de rationalisation des phénomènes anormaux en viscosité*, C. R. T., 223, pp. 535-537.

(3) Voir H. VILLAT, *Leçons sur les fluides visqueux*, chap. v, VIII et IX.

nique classique et dont nous avons déjà exposé le point de départ, au cours de notre Chapitre III, c'est-à-dire les équations de NAVIER ou équations linéarisées de STOKES étant admises, *le caractère de leur approximation avec les phénomènes*, sera étudié d'abord en considération de cette question des conditions initiales qu'il ne faut donc pas prétendre déterminer, du moins en l'état actuel, au moyen de données indépendantes, *a priori*, ensuite en fonction de ce fait que les phénomènes expérimentalement constatés pourront exiger l'introduction de surfaces de singularités ou sillages au sein même du liquide; c'est-à-dire des lieux distincts des limites où, en fait, cependant les équations ne seront plus vérifiées.

Commençant par l'étude de cette question relative aux conditions aux limites et plutôt que d'envisager les circonstances les plus générales des mouvements, ce qui nous conduirait à des développements assez lourds et d'un intérêt pratique contestable, nous nous bornerons pour cela à une étude générale des mouvements à symétrie axiale et qui permettent des démonstrations particulièrement élégantes et suggestives aussi, quant aux applications. On comprendra aisément que si la proposition en vue est établie pour ces mouvements plus simples, *a fortiori*, doit-il en être, quant aux mouvements, plus généraux donc plus compliqués.

IV-2 En nous reportant à la notation de notre Section IV, s'agissant d'un liquide visqueux, nous avons ici en coordonnées rectangulaires (1) :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{lll} X_1 = N_1 = p - 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, & X_2 = Y_1 = T_3 = -\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), & X_3 = Z_1 = T_2 = -\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ Y_1 = X_2 = T_3, & Y_2 = N_2 = p - 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}, & Y_3 = Z_2 = T_1 = -\eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ Z_1 = X_3 = T_2, & Z_2 = Y_3 = T_1 & Z_3 = N_3 = p - 2\eta \frac{\partial w}{\partial z}; \end{array} \right.$$

où p est une fonction du point x, y, z , qui tend vers la pression quand le coefficient de viscosité η ou la vitesse V de composantes u, v, w tendent vers zéro. Ces expressions impliquent donc, d'après leur forme même, *le principe de l'égalité de l'action à la réaction* dans son intégrité.

Substituant ces expressions (1) dans le système général (2) de notre Section IV, il vient immédiatement, Δ désignant le Laplacien :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \Delta u = \rho \left(X - \frac{du}{dt} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \Delta v = \rho \left(Y - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \eta \Delta w = \rho \left(Z - \frac{dw}{dt} \right). \end{array} \right.$$

Telles sont donc les équations de NAVIER sous leur forme la plus générale.

Dans la pratique on considère que les forces extérieures se réduisent à la pesanteur c'est-à-dire que $X = 0, Y = 0, Z = g$ et, pour simplifier l'écriture, on conviendra de substituer $p - \rho g z$ à p , ce qui revient finalement à écrire dans (2) que $X = Y = Z = 0$ puis, développant d'autre part l'accélération, il vient :

(1) Voir Paul APPEL, *Mécanique rationnelle*, t. III, troisième édition, chap. XXXIX.

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \Delta u + \rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t} \right) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \Delta v + \rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial t} \right) = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \eta \Delta w + \rho \left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial t} \right) = 0. \end{cases}$$

Les équations linéarisées de STOKES se réduiront donc à :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \Delta u + \rho \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \Delta v + \rho \frac{\partial v}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \eta \Delta w + \rho \frac{\partial w}{\partial t} = 0. \end{array} \right.$$

A ces équations, nous adjoindrons l'équation de continuité pour les fluides incompressibles, soit :

$$(5) \quad \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Nous nous limiterons d'ailleurs aux circonstances du régime permanent, c'est-à-dire que nous supposerons que :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial t} = 0.$$

En nous reportant à l'application de notre formule (6) de notre Chapitre III, *l'énergie dissipée* par unité de temps *au sein du milieu fluide exclusivement*, sera ici exactement donnée en substituant dans cette formule aux X_i , Y_i , Z_i , leurs valeurs (1) de la présente section, soit donc :

$$\begin{aligned} - \iint^* \mathbf{VT} \cos(\mathbf{V}, \mathbf{T}) dS &= - \iiint^* \left[\left(p - 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial u}{\partial y} - \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial z} \right. \\ &\quad - \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial x} + \left(p - 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} - \eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \frac{\partial v}{\partial z} \\ &\quad \left. - \eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \frac{\partial w}{\partial x} - \eta \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \frac{\partial w}{\partial y} + \left(p - 2\eta \frac{\partial w}{\partial z} \right) \frac{\partial w}{\partial z} \right] d\tau. \\ (6) \quad - \iint^* \mathbf{VT} \cos(\mathbf{V}, \mathbf{T}) dS &= \eta \iiint^* \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. 2 \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] d\tau. \end{aligned}$$

Telle est l'expression essentiellement positive de la *fonctionnelle de Lord RAYLEIGH*, dont nous avons ainsi précisé la signification exacte, ce qui n'avait été fait jusqu'à présent, comme on le comprendra avec évidence par les résultats paradoxalement nouveaux que nous déduirons de la stricte observation du sens de cette fonctionnelle.

Nous nous proposons maintenant de transformer en coordonnées cylindriques les équations (3) et l'expression (6) mais tout en tenant compte, au cours des calculs, du fait simplificateur de la symétrie axiale admise; ce qui, en bref, revient à dire que les grandeurs physiques seront supposées indépendantes de l'angle polaire θ , c'est-à-dire

que V_z , V_r étant les composantes axiale et radiale de la vitesse situées dans les plans méridiens et $V_n = r\omega$ étant la composante normale à ces mêmes plans, nous écrivons :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} = \frac{\partial V_z}{\partial \theta} = \frac{\partial V_n}{\partial \theta} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0. \end{array} \right.$$

Ayant posé :

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

on a :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = V_r \cos \theta - V_n \sin \theta, \quad v = V_r \sin \theta + V_n \cos \theta, \quad w = V_z, \end{array} \right.$$

on vérifiera d'une façon générale les résultats classiques suivants relatifs à une fonction quelconque $A(r, z, \theta)$.

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial A}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial A}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}; \quad \frac{\partial A}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta}, \\ \Delta A = \frac{\partial^2 A}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}, \end{array} \right.$$

tenant compte des conditions de symétrie (7) et des relations générales (8) et (9) il vient :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} = \cos \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_n}{\partial r} \sin \theta \right) - \frac{\sin \theta}{r} (-V_r \sin \theta - V_n \cos \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial y} = \sin \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_n}{\partial r} \sin \theta \right) + \frac{\cos \theta}{r} (-V_r \sin \theta - V_n \cos \theta), \\ \frac{\partial v}{\partial x} = \cos \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_n}{\partial r} \cos \theta \right) - \frac{\sin \theta}{r} (V_r \cos \theta - V_n \sin \theta), \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \sin \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_n}{\partial r} \cos \theta \right) + \frac{\cos \theta}{r} (V_r \cos \theta - V_n \sin \theta), \\ \Delta u = \cos \theta \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) - \sin \theta \left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right), \\ \Delta v = \sin \theta \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) + \cos \theta \left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right), \\ \Delta w = \frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2}, \end{array} \right.$$

substituant ces résultats dans les deux premières équations (3), limitées pour simplifier au régime permanent, il vient immédiatement :

$$\left[\frac{\partial p}{\partial r} - \eta \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) + \rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_n^2}{r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial r} \right) \right] \cos \theta \\ + \left[\eta \left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right) - \rho \left(V_r \frac{\partial V_n}{\partial r} + \frac{V_r V_n}{r} + V_z \frac{\partial V_n}{\partial z} \right) \right] \sin \theta = 0$$

et une équation semblable à cela près, que $\sin \theta$ et $\cos \theta$ y sont permutés entre eux.

Le mouvement étant à symétrie axiale, il est clair que les facteurs ci-dessus de $\sin \theta$ et $\cos \theta$ étant indépendants de θ , doivent s'annuler séparément; tenant compte de la transformation plus facile de la dernière équation (3) et de l'équation (5), il vient finalement :

$$(11) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial r} - \eta \left(\frac{\partial^2 V_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{V_r}{r^2} + \frac{\partial^2 V_r}{\partial z^2} \right) + \rho \left(V_r \frac{\partial V_r}{\partial z} - \frac{V_n^2}{r} + V_z \frac{\partial V_r}{\partial z} \right) &= 0, \\ \eta \left(\frac{\partial^2 V_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_n}{\partial r} - \frac{V_n}{r^2} + \frac{\partial^2 V_n}{\partial z^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial V_n}{\partial r} + \frac{V_n V_r}{r} + V_z \frac{\partial V_n}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial p}{\partial z} - \eta \left(\frac{\partial^2 V_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 V_z}{\partial z^2} \right) + \rho \left(V_r \frac{\partial V_z}{\partial r} + V_z \frac{\partial V_z}{\partial z} \right) &= 0, \\ \frac{\partial (r V_r)}{\partial r} + \frac{\partial (r V_z)}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \right.$$

Semblablement, en substituant les relations (10) dans l'expression (6) tenant compte de $V_n = r\omega$, ω étant la vitesse angulaire, et de l'équation de continuité, il vient après quelques réductions :

$$(12) \quad - \iint VT \cos (V, T) dS = 2\pi\eta \iint \left\{ r^2 \left[\left(\frac{\partial \omega}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} \right)^2 \right] + 2 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 \right\} r dr dz,$$

le champ d'intégration étant la moitié située d'un même côté de l'axe, de l'aire de la section méridienne du liquide.

Arrivés à ce point, nous avons une *remarque essentielle* à faire; nous plaçant pour fixer les idées dans le cas d'un corps solide de révolution tournant à vitesse uniforme ω_0 autour de son axe, dans un récipient fixe, également de révolution et coaxial.

Si l'expression (12) était formellement égale à l'énergie *dissipée* par unité de temps *dans le système*, désignant par Γ le couple constant à appliquer au corps tournant pour le maintenir en mouvement, nous aurions nécessairement :

$$(13) \quad \Gamma \omega_0 = - \iint VT \cos (V, T) dS.$$

Mais, en admettant même que cette équation soit vraie, ce qui n'est pas analytiquement prouvé, ce ne saurait être *qu'une équation et non une identité* et, comme nous allons le voir, *cette distinction à établir et jusqu'alors négligée est capitale en la question*.

Pour cela il nous va falloir maintenant calculer directement l'expression tout à fait remarquable de ce couple.

En se reportant à des calculs qui ont été effectués au paragraphe III-3 de notre Chapitre III, on voit qu'au signe près :

$$\Gamma = \iint [x(\alpha Y_1 + \beta Y_2 + \gamma Y_3) - y(\alpha X_1 + \beta X_2 + \gamma X_3)] dS,$$

l'intégrale étant étendue, par exemple, à la surface du corps tournant (1).

(1) D'après ce que nous avons établi on parviendrait au même résultat, en intégrant sur l'enveloppe extérieure ou sur toute surface de courant séparant l'enveloppe du corps immergé.

Substituant alors dans l'intégrale les expressions correspondantes des formules (1) on a :

$$\Gamma = \iint \left\{ x \left[-\alpha\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \beta \left(p - 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \gamma\eta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \right] \right. \\ \left. - y \left[\alpha \left(p - 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \beta\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \gamma\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} dS.$$

Désignant par φ l'angle de la normale à la section méridienne de la surface de révolution avec l'axe Oz, θ étant comme précédemment l'angle polaire, nous avons ici :

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \sin \varphi \cos \theta, \quad \beta = \sin \varphi \sin \theta, \quad \gamma = \cos \varphi, \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \end{array} \right.$$

substituant encore, on a :

$$\Gamma = -\eta \iint \left[\sin \varphi (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + 2 \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\ \left. - \cos \varphi \cos \theta \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \cos \varphi \sin \theta \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] r dS.$$

En fait, l'expression à intégrer est précisément le moment de l'élément de la composante de l'effort, normale aux plans méridiens, soit :

$$\Gamma = - \iint T_n r dS,$$

substituant donc dans $\frac{T_n}{r}$ les expressions tirées de (10) il vient successivement :

$$\begin{aligned} \frac{T_n}{r} &= \sin \varphi (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \left[\cos \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_n}{\partial r} \cos \theta \right) - \frac{\sin \theta}{r} (V_r \cos \theta - V_n \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + \sin \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_n}{\partial r} \sin \theta \right) + \frac{\cos \theta}{r} (-V_r \sin \theta - V_n \cos \theta) \right] \\ &\quad + 2 \sin \varphi \sin \theta \cos \theta \left[\cos \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial V_n}{\partial r} \sin \theta \right) + \frac{\sin \theta}{r} (V_r \sin \theta + V_n \cos \theta) \right. \\ &\quad \left. - \sin \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_n}{\partial r} \cos \theta \right) - \frac{\cos \theta}{r} (V_r \cos \theta - V_n \sin \theta) \right] \\ &\quad - \cos \theta \cos \varphi \left(\frac{\partial V_z}{\partial r} \sin \theta + \frac{\partial V_r}{\partial z} \sin \theta + \frac{\partial V_n}{\partial z} \cos \theta \right) \\ &\quad + \cos \varphi \sin \theta \left(\frac{\partial V_r}{\partial z} \cos \theta - \frac{\partial V_n}{\partial z} \sin \theta + \frac{\partial V_z}{\partial r} \cos \theta \right), \\ \frac{T_n}{r} &= -\cos \varphi \frac{\partial V_n}{\partial z} - \sin \varphi \frac{\partial V_n}{\partial r} + \sin \varphi \frac{V_n}{r} = -\sin \varphi r \frac{\partial \omega}{\partial r} - \cos \varphi r \frac{\partial \omega}{\partial z}, \end{aligned}$$

puisque $V_n = r\omega$.

Il vient finalement, au signe près, toutes réductions faites :

$$(14) \quad \Gamma = 2\pi\eta \int r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dr - \frac{\partial \omega}{\partial r} dz \right),$$

l'intégrale curviligne étant prise sur la méridienne de la surface intéressée, d'un pôle à l'autre (1).

Cette expression du couple Γ a ceci de très remarquable qu'il n'y figure d'autre terme de la vitesse que la vitesse angulaire, ce qui ne veut point dire cependant que les composantes V_r , V_z des plans méridiens n'interviennent, comme nous le verrons d'ailleurs par la suite, pour *influencer la valeur de la composante* $V_n = r\omega$ normale à ces plans.

IV-3 ÉTUDE APPROFONDIE DES MOUVEMENTS PERMANENTS GIRATOIRES

Munis des résultats qui découlent des substitutions et changements de coordonnées du paragraphe précédent, nous allons maintenant établir les deux importantes propositions que nous avons en vue.

Nous commencerons par montrer qu'en fonction de l'emploi des équations de NAVIER complètes, c'est-à-dire, ici, du système (11), le mouvement plan, c'est-à-dire en fait circulaire et contenu dans les plans normaux à l'axe de symétrie est incompatible.

Faisant en effet dans ce système :

$$V_r = V_z = 0, \quad \text{y posant} \quad V_n = r\omega,$$

il écrira :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} = \rho r \omega^2, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Nous remarquerons qu'en fonction de l'équation de continuité, la condition $V_r = 0$ est une conséquence de $V_z = 0$. Cette dernière condition étant posée, il vient bien d'abord $rV_r = a(z)$ et la condition de flux aux limites, aussi bien que le fait que V_r doit être borné sur l'axe, impose que $a(z) \equiv 0$.

Ceci posé, on tire des deux premières équations :

$$\frac{\partial \omega}{\partial z} = 0$$

et par suite, de la dernière :

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0,$$

d'où :

$$\omega = \frac{C_1}{r^2} + C_2,$$

C_1 et C_2 étant des constantes.

La vitesse $V_n = r\omega$ ne pouvant être infinie sur l'axe, il faudrait donc que $C_1 = 0$ et il n'existerait donc pas d'autre mouvement que la rotation en bloc.

(1) Voir DU BOSQ DE BEAUMONT, C. R. *loc. cit. ante*, *Essai de rationalisation des phénomènes anormaux en viscosité*.

L'hypothèse $V_z \equiv 0$ est donc à rejeter quand on conserve les termes d'inertie dans les équations de NAVIER (11).

Pour démontrer la seconde proposition en vue, nous allons d'abord établir quelques résultats relatifs à l'allure générale des solutions à trois dimensions du système (11). Nous conviendrons, pour la simplification de l'écriture, d'introduire dorénavant l'opérateur E défini, par exemple, par :

$$E(r^2\omega) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial z} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial \omega}{\partial r} \right).$$

Nous introduirons également la fonction de courant méridienne, définie par :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} rV_r = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \\ rV_z = -\frac{\partial \psi}{\partial r}. \end{array} \right.$$

Selon cette notation, l'équation de continuité étant ainsi satisfaite identiquement, le système (11) s'écrira après quelques réductions :

$$(17) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial E(\psi)}{\partial z} + \rho \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} - r\omega^2 - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = 0, \\ \frac{\eta}{r} E(r^2\omega) = \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \omega}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{2\omega}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial E(\psi)}{\partial z} + \rho \left(-\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z} \right) = 0 \quad (1). \end{array} \right.$$

Les équations de STOKES se déduiront des précédentes en y faisant $\rho = 0$, elles s'écriront donc :

$$(18) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\eta}{r} \frac{\partial E(\psi)}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\eta}{r} \frac{\partial E(\psi)}{\partial r} = 0, \quad E(r^2\omega) = 0. \end{array} \right.$$

Éliminant p entre ces équations linéaires, on obtient après quelques réductions le système à fonctions séparées :

$$(19) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p = 0, \quad E(r^2\omega) = 0, \quad EE(\psi) = 0, \end{array} \right.$$

où Δ est le Laplacien en coordonnées cylindriques. Nous étudierons pour fixer les idées, l'allure des courbes sur le système linéaire. On sait que les sections méridiennes des surfaces de courant correspondent aux lignes $\psi = C^{te}$; ceci résultant des équations différentielles des trajectoires qui, ψ étant déterminé, s'expriment en vertu de (16) par :

$$(20) \quad \left\{ \begin{array}{l} r \, dr = -\frac{r \, dz}{\frac{\partial \psi}{\partial r}} = \frac{d\theta}{\omega}, \end{array} \right.$$

système qui présente l'intégrale première :

$$(21) \quad \psi(r, z) = C^{te},$$

ce qui démontre ce que nous venons de dire.

(1) En développant, on obtiendrait :

$$E(\psi) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2}, \quad E(r^2\omega) = r^2 \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} \right).$$

Les courbes méridiennes (21) devront donc être des courbes fermées se réduisant d'une part, à des points singuliers définis par le système $\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, et, d'autre part, aux limites et à l'axe selon la *fig. 2*.

Ces courbes fermées s'obtiendront en déterminant des solutions $\psi(r, z)$ de la dernière des équations (19) constantes sur le contour simplement connexe comprenant deux segments de l'axe, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \xi, \zeta, \alpha$, de la *figure*. L'équation en question étant du *quatrième ordre* il est évident *qu'il existe une infinité de solutions satisfaisant à la question*, nous verrons, un peu plus loin, quel sens il faut attacher à cette circonstance.

D'après ce que l'on sait des équations de ce genre, une solution pourrait d'ailleurs être déterminée en se donnant la dérivée normale $\frac{d\psi}{dn}$ sur le contour limite en question, ce qui reviendrait à se donner les vitesses mais ceci soulève précisément d'autres difficultés, comme on le comprendra mieux par la suite.

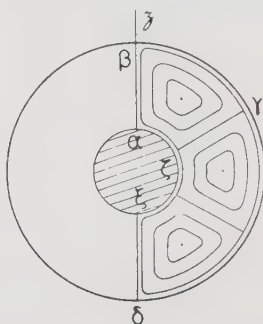


Fig. 2.

Quand on aurait déterminé ainsi une solution ψ il faudrait encore qu'elle s'accorde avec la solution ω tirée de la seconde équation, c'est-à-dire que les trajectoires qui s'enroulent sur les anneaux dont les courbes $\psi = C^{\text{te}}$ sont les sections méridiennes, se referment après avoir décrit un nombre entier de tours autour de l'axe. Nous reviendrons tout à l'heure sur l'étude de cette condition nécessaire (1).

On pourra observer maintenant qu'aucune solution ψ de :

$$EE(\psi) = 0,$$

ne pourra impliquer de vitesses méridiennes continues aux limites. Ayant, en l'hypothèse de continuité des vitesses sur les limites, $\frac{\partial \psi}{\partial r} = \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0$, c'est-à-dire $\frac{d\psi}{dn} = 0$, sur ces limites, il est vraisemblable qu'une solution constante sur la limite simplement connexe envisagée et dont la dérivée normale serait nulle sur cette même limite, devrait se réduire à une constante à l'intérieur du contour correspondant.

Nous allons, en effet, retrouver ce résultat par une autre voie applicable au cas général des équations non linéaires, quant auxquelles nous admettrons que les renseignements que nous avons obtenus sur l'allure générale des trajectoires pourront se transposer, ce qui est d'ailleurs évident, l'établissement des résultats indiqués n'ayant nullement fait appel au caractère linéaire des équations.

(1) DU BOSQ DE BEAUMONT, C. R., *loc. cit. ante*.

Nous allons maintenant comparer les expressions de l'énergie dissipée dans le liquide, par unité de temps, en l'hypothèse de la continuité des vitesses aux limites, en les tirant successivement de (13) et (14).

Soit donc, en cette hypothèse, ω_2 et ω_1 les vitesses angulaires *constantes*, de l'une et l'autre limite, au signe près cette énergie sera égale, d'après (14) à :

$$\begin{aligned}\Gamma(\omega_2 - \omega_1) &= 2\pi\eta(\omega_2 - \omega_1) \int r^3 \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} dr - \frac{\partial\omega}{\partial r} dz \right) \\ &= 2\pi\eta \int r^3 \omega \left(\frac{\partial\omega}{\partial z} dr - \frac{\partial\omega}{\partial r} dz \right),\end{aligned}$$

la première intégrale curviligne pouvant être étendue, comme il a été dit à l'une ou l'autre limite indifféremment, ce qui permet de considérer la dernière comme liée au contour simplement connexe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \alpha$ précédemment décrit. En appliquant la formule de GREEN il vient encore :

$$\begin{aligned}\Gamma(\omega_2 - \omega_1) &= 2\pi\eta \iint \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \omega \frac{\partial\omega}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \omega \frac{\partial\omega}{\partial r} \right) \right] dr dz \\ &= 2\pi\eta \iint r^3 \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial r} \right)^2 \right] dr dz + 2\pi\eta \iint \omega \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(r^3 \frac{\partial\omega}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(r^3 \frac{\partial\omega}{\partial r} \right) \right] dr dz \\ \Gamma(\omega_2 - \omega_1) &= 2\pi\eta \iint r^3 \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial r} \right)^2 \right] dr dz + 2\pi\eta \iint r\omega E(r^2\omega) dr dz.\end{aligned}$$

Observant, quant au signe, que dans le cas des équations de STOKES, $E(r^2\omega) = 0$ et que la première intégrale est essentiellement positive; en l'hypothèse de la continuité on a donc, en définitive, l'équation :

$$\begin{aligned}&\iint r^3 \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial r} \right)^2 \right] dr dz + \iint r\omega E(r^2\omega) dr dz \\ &= \iint r^3 \left[\left(\frac{\partial\omega}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial\omega}{\partial r} \right)^2 \right] dr dz + \iint \left[2 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 \right] r dr dz.\end{aligned}$$

Il reste donc :

$$(22) \quad \iint r\omega E(r^2\omega) dr dz = \iint \left[2 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} \right)^2 + 2 \left(\frac{V_r}{r} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial V_z}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial r} \right)^2 \right] r dr dz$$

En l'hypothèse des équations linéarisées de STOKES $E(r^2\omega) = 0$ et la démonstration est immédiate. Le second membre montre qu'on doit avoir :

$$V_r = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial V_z}{\partial r} = 0,$$

Ainsi l'hypothèse de la continuité ne s'appliquerait, pour ce qui est de la vitesse méridienne, qu'au cas d'une translation axiale en bloc que nous pouvons laisser de côté.

Quant aux équations complètes, la seconde équation (17) s'écrira :

$$r\omega E(r^2\omega) = \frac{\rho\omega}{\eta} \left[\frac{\partial(\psi, r^2\omega)}{\partial(r, z)} \right].$$

Nous allons montrer que l'intégrale :

$$\iint r\omega E(r^2\omega) dr dz = \frac{\rho}{\eta} \iint \omega \frac{\partial(\psi, r^2\omega)}{\partial(r, z)} dr dz = \frac{\rho}{\eta} \iint \omega d\psi d(r^2\omega)$$

est encore nulle.

Or le champ de cette intégrale, dans le plan des variables ψ, ω , est formé de deux feuillets se recouvrant exactement; les éléments d'aires y ayant des signes contraires aux points se correspondant.

Il suffira de montrer que, pour une valeur déterminée de ψ , les termes de l'intégration partielle sont égaux; c'est-à-dire, désignant par r et r^* les expressions de $r(\omega, \psi)$ dans l'un et l'autre feuillet, qu'on doit avoir :

$$\int_{\omega_a}^{\omega_b} \omega d(r^2\omega) \equiv \int_{\omega_a}^{\omega_b} \omega d(r^{*2}\omega),$$

sachant que sur le bord :

$$r^2(\omega_a, \psi) \equiv r^{*2}(\omega_a, \psi)$$

$$r^2(\omega_b, \psi) \equiv r^{*2}(\omega_b, \psi)$$

En fonction de ce qui précède, on a alors, en intégrant par parties :

$$\int_{\omega_a}^{\omega_b} r^2 \omega d\omega \equiv \int_{\omega_a}^{\omega_b} r^{*2} \omega d\omega$$

Or $d(r^2\omega)$ est une intégrale première des caractéristiques de la seconde équation 17, ci-dessus rappelée, où ψ est l'inconnue, par suite :

$$r^2\omega \equiv r^{*2}\omega = f(\psi).$$

Les intégrales précédentes sont donc identiques quel que soit ψ et leur différence est identiquement nulle. L'intégrale double en question est donc identiquement nulle (1).

Désignant, par *non dégénérés*, les mouvements comprenant *simultanément une composante méridienne des vitesses et une autre normale aux plans méridiens*, nous pouvons donc énoncer que :

— les mouvements permanents à symétrie axiale, non dégénérés, d'un fluide visqueux incompressible sont nécessairement discontinus aux limites, comprenant par là que la vitesse du fluide diffère de celle des parties solides en contact immédiat.

Ayant établi, au début du présent paragraphe, que les mouvements dépendant des équations de NAVIER complètes ne sont jamais dégénérés au sens qui vient d'être défini dès lors que la vitesse angulaire n'est pas nulle, nous pouvons dire que :

(1) La démonstration du cas non linéaire a été établie en collaboration avec J. Martinek, en modification du texte primitif.

— les mouvements permanents tournoyants à symétrie axiale (mouvements giratoires) dépendant des équations de NAVIER complètes sont nécessairement discontinus aux limites.

Que peut-on dire maintenant des mouvements giratoires dépendant des équations linéarisées de STOKES?

Pour répondre à cette question, nous allons reprendre celle, laissée précédemment en suspens, de l'accord à réaliser entre les différentes composantes des vitesses, c'est-à-dire en fait, entre la fonction de courant ψ et la vitesse angulaire ω , pour que les trajectoires permanentes se referment ou, en bref, pour que la cohérence du mouvement permanent soit assurée.

Nous sommes, bien entendu, en régime linéaire de STOKES. Revenant à nos équations (20) des trajectoires, ce sont les caractéristiques de l'équation aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(23) \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial z} = r\omega.$$

En y supposant ψ et ω donnés, les caractéristiques seront tracées sur les surfaces intégrales $\theta(r, z)$ de l'équation (23), ces surfaces présenteront les points méridiens stationnaires définis par $\frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0$. On peut se représenter ces surfaces dans l'espace à trois dimensions comme des hélicoïdes recourbés dont la droite directrice serait devenue une circonférence répondant précisément au lieu de ces points stationnaires en question. La surface sera donc *analytique* mais comprenant une *circonférence singulière*, celle que nous venons de désigner et qui concerne un certain anneau de l'espace axé sur cette circonférence. Ainsi les surfaces $\theta(r, z)$ pourront se décomposer comme appartenant à différents anneaux *toriques* contigus, chacun de ces anneaux étant défini par sa circonférence singulière dont il constitue, en quelque sorte, l'*atmosphère spatiale*.

Nous isolerons un *anneau*, c'est-à-dire que nous allons voir comment les trajectoires, appartenant à l'atmosphère d'une circonférence singulière, c'est-à-dire, d'un point stationnaire du plan méridien, peuvent se refermer après un certain nombre de tours.

Il résulte directement du système (20) et des remarques que nous venons de faire à propos des surfaces intégrales $\theta(z, r)$ de (23), que pour toute courbe fermée $\psi(r, z) = C^{\text{te}}$ ne renfermant qu'un point stationnaire, on peut définir le nombre Θ :

$$(24) \quad \Theta = - \int_c \frac{r\omega}{\frac{\partial \psi}{\partial r}} dz$$

qui ne dépendra pas de la courbe individuellement choisie et qui représentera la *circulation* autour du point méridien stationnaire considéré.

De la considération de ce nombre, N étant ensuite un nombre rationnel, on déduit que le nombre h donné par :

$$(25) \quad h = - \frac{N}{2\pi} \int_c \frac{r\omega}{\frac{\partial \psi}{\partial r}} dz,$$

est un facteur à appliquer à ψ , en sorte que ω et ψ étant donnés d'abord, ensuite la fonction de courant $h\psi$ sera celle qui, conjuguée avec ω , réalisera la *fermeture corrélative* de

toutes les trajectoires appartenant à l'atmosphère de l'anneau considéré. L'arbitraire N indiquant le nombre de spires entier ou fractionnaire par tour (1).

Nous remarquerons, en effet, que le premier membre de (23) étant le jacobien $\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(r, z)}$, tant qu'il ne s'annule pas, c'est-à-dire tant que, d'après (23) $r\omega \neq 0$ il y a correspondance bi-univoque entre (ψ, θ) et (r, z) .

Vu la discontinuité de $\frac{d\psi}{dn}$ aux limites, que nous avons établie, nous manquons totalement d'éléments pour la détermination complète de $\psi(r, z)$ et, par contre-coup, comme nous allons le voir, pour celle de $\omega(r, z)$. Il y aurait donc une infinité de mouvements possibles et nous venons précisément de voir comment, fait que l'expérience d'ailleurs confirme, il existe des vitesses critiques ω_0 de bifurcation, d'un mouvement à l'autre et qui paraissent dépendre de la viscosité et de la nature du liquide. L'expérience a également montré que les points de bifurcation pour un système donné étaient bien déterminés et qu'entre ces points la fonction $\Gamma = f(\omega_0)$ ou Γ est le couple appliqué au corps tournant et ω_0 sa vitesse angulaire, est un segment de droite et l'effet proportionnel au coefficient de viscosité.

Ce dernier point qui avait été observé par Amédée GUILLET (2) est facile à comprendre si l'on admet le régime de STOKES. Reprenons les équations (4) limitées au régime permanent soit :

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \Delta u = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \Delta v = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} - \eta \Delta w = 0, \end{array} \right.$$

tenant compte de :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

on tire immédiatement de (26) :

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p = 0, \quad \Delta \Delta u = 0, \quad \Delta \Delta v = 0, \quad \Delta \Delta w = 0, \end{array} \right.$$

sous cette forme, le champ du vecteur (u, v, w) apparaît comme étant indépendant du coefficient de viscosité η tandis que dans le cas du système non linéarisé (3) ce champ dépend du coefficient cinématique de viscosité $\nu = \frac{\eta}{\rho}$. Si nous rappelons maintenant notre expression (14) du couple :

$$\Gamma = 2\pi\eta \int r^3 \left(\frac{\partial \omega}{\partial z} dr - \frac{\partial \omega}{\partial r} dz \right),$$

il devient encore manifeste qu'en régime de STOKES le couple doit être proportionnel au coefficient de viscosité et qu'il n'en peut être ainsi en régime hydraulique, c'est-à-dire quand on conserve les termes carrés qui se présentent dans la théorie des liquides

(1) Voir DU BOSQ DE BEAUMONT, C. R., loc. cit. ante.

(2) Amédée GUILLET, DU BOSQ DE BEAUMONT, Jacques HUETZ, loc. cit. ante et Marius AUBERT et Jean VILLEY, C. R. 224, 1947, p. 1271.

parfaits. Sur ce point, nous ne pouvons donc adhérer à l'explication que M. Fernand CHARRON pense devoir donner de nos phénomènes qu'il a lui-même observés et qu'il tente d'expliquer par l'intervention d'une force centrifuge (1).

En résumé, nous voyons que, dans le cas des équations linéarisées, plusieurs mouvements sont possibles jusques et y compris le mouvement circulaire classique qui correspond à la solution analytique continue de :

$$E(r^2\omega) = \frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = 0,$$

prenant donc deux valeurs constantes ω_0 et ω_1 sur les limites, ces diverses solutions possibles étant *analytiquement séparées les unes des autres*, comme il résulte de notre étude précédente.

C'est précisément cette solution continue que Jacques HUETZ le premier, Amédée GUILLET n'ayant pu l'observer, a pu mettre en évidence dans le cas de sphères concentriques, ensuite avec des ellipsoïdes et des plaques, dont on calcula préalablement les formules exactes, celles données jusqu'avant nos recherches étant au surplus foncièrement erronées. L'accord avec l'expérience s'est révélé parfait pour des huiles suffisamment visqueuses (2).

Nous avons constaté l'impossibilité théorique de déterminer entièrement $\psi(r, z)$ et également qu'il devait être possible de refermer toutes les trajectoires corrélativement, sauf peut-être sur certaines surfaces singulières.

En particulier, admettant l'existence de $\psi(r, z)$ pourrait-on continuer à déterminer $\omega(r, z)$ au moyen de la fonction continue, solution de l'équation $E(r^2\omega) = 0$, ainsi déterminée de façon unique? Du point de vue de la fermeture des trajectoires que nous avons examinée rien ne s'y oppose, mais il existe précisément d'autres conditions de compatibilité qui résultent des considérations suivantes :

En nous reportant aux équations (13) et (14) dont nous avons tiré (22) on parviendrait, en cette hypothèse de la continuité de $\omega(r, z)$ à cette conclusion que l'énergie dépensée dans le fluide seulement, alors qu'il existerait effectivement une composante méridienne, serait supérieure à celle dépensée dans le système en son entier. Nous devons donc repousser la continuité de la vitesse angulaire dès lors que l'expression classique du couple est à rejeter, c'est-à-dire dès après le premier point critique constaté expérimentalement par Jacques HUETZ. *On voit donc comment l'existence d'une composante méridienne retentit sur la valeur du couple dont l'expression (14) paraît formellement indépendante.*

IV-4

LA QUESTION DU COIN D'HUILE

Au cours des paragraphes précédents, acceptant les équations de NAVIER ou de STOKES, nous avons en somme montré que même dans le cas simplifié où l'on admettait une symétrie axiale des systèmes et des mouvements, on ne pouvait parvenir en général à maintenir l'analyticité jusqu'aux limites incluses. Ce fait se traduisant par l'impossibilité pratique de résoudre les questions au moyen de problèmes de DIRICHLET-NEUMANN généralisés auxquels nous avons fait allusion et qui postuleraient la continuité des vitesses jusqu'aux limites comprises.

(1) F. CHARRON, *Mouvement d'un fluide visqueux entre deux sphères concentriques*, Publications Scientifiques et Techniques du Ministère de l'Air, n  208, 1947 et C. R. T. 224, n  6, p. 373.

(2) J. HUETZ, *loc. cit. ante* et *Calcul du couple exercé sur un ellipsoïde*, C. R. T. 225, pp. 40-42, 1947.

C'est alors le moment de se demander s'il serait, malgré cela, possible d'envisager une solution générale analytique des problèmes, en fonction des vitesses du fluide même, au contact des limites et que l'on pourrait supposer *continues dans le fluide et sur le fluide* ; nous désintéressant ainsi, en quelque sorte, des vitesses propres aux solides limitants.

Une telle position de repli permettrait-elle de justifier, dans une certaine mesure, les recherches et problèmes portant sur l'emploi des *potentiels hydrodynamiques de FAXEN* ⁽¹⁾ en ce sens que si la vitesse du fluide incompressible au contact des limites n'est pas celle des limites au contact, elle pourrait n'en être pas moins définie et sans doute continue dans le fluide et sur sa propre surface. Nous allons montrer ici qu'une telle manière de voir serait au moins imprudente quant aux cas particuliers et certainement erronée en général.

Précisément, et en nous limitant aux *problèmes plans* les plus généraux à deux dimensions, relatifs à un fluide incompressible, alors que l'analyticité, en l'espèce dépendant de la continuité des vitesses aux limites, limites comprises, paraît théoriquement possible, nous allons voir que les solutions entièrement analytiques correspondantes n'ont aucune signification mécanique ou physique ; ce qui, très vraisemblablement, doit être l'indice d'une incompatibilité d'ordre rationnel sous-jacente et que, pour entrer dans la voie qui conduirait à des solutions acceptables, il faudrait commencer par admettre l'existence de discontinuités analytiques au sein même du fluide, lieux qui feraient, en l'espèce, exception aux équations.

  propos de la recherche de l'expression de la poussée résultant de la réaction du fluide sur un arbre en rotation uniforme dans son coussinet, SOMMERFELD ⁽²⁾ ayant établi l'équation biharmonique $\Delta\Delta\psi = 0$ à laquelle satisfait la *fonction de courant plane* ψ et, comme nous le verrons, fait remarquer que par analogie avec le problème des plaques encastrées en élasticité, on peut se donner les valeurs de ψ sur les limites, en l'espèce deux valeurs constantes différentes et, également, les valeurs de la dérivée normale $\frac{d\psi}{dn}$, en l'espèce encore les deux valeurs constantes différentes de la vitesse et qu'une solution analytique, $\psi(x, y)$ est ainsi déterminée dans l'espace plan interstitiel.

Ayant fait cette remarque, SOMMERFELD renonce, à cause de la difficulté qu'il suppose, à une intégration exacte du problème tel qu'il se l'est posé et, par approximation, trouve une certaine expression de la poussée du film d'huile sur l'arbre en rotation.

Malheureusement pour le point de vue que cet auteur soutient, et qui n'est autre que le classique, nous avons trouvé le moyen d'évaluer en toute rigueur cette poussée en question, attachée à la solution exacte de l'équation biharmonique et cette *résultante est rigoureusement nulle* ⁽³⁾.

Ainsi, si l'on tient à conserver l'équation biharmonique, c'est-à-dire, en fait les principes mêmes de la Mécanique Rationnelle en ce qui concerne les mouvements suffisamment lents, il est nécessaire d'y apporter quelque temp r ment en introduisant des *lignes de discontinuité analytique* c'est-à-dire des surfaces cylindriques et cette fois *dans le fluide même*, voire des volumes de singularités.

C'est cette découverte que nous avons faite, que nous allons exposer et qui a trait, on peut dire, *au problème du coin d'huile* en sa plus grande extension, c'est-à-dire

(1) Voir H. VILLAT, *loc. cit. ante*.

(2) Voir SOMMERFELD, *Zur hydrodynamischen theorie der Schmiermittelreibung*.

(3) Un résultat contraire de Jeffrey est  ron . — V. DRYDEN, MURNAGHAN, BATEMAN, *Hydrodynamics*.

le problème de la poussée sur l'obstacle, dans le cas du mouvement plan le plus général, relatif à un fluide incompressible se déplaçant de façon identique dans tous les plans verticaux. Les obstacles et limites sont donc des cylindres indéfinis de génératrices horizontales.

Différemment de SOMMERFELD, nous ne tenterons pas de passer par l'expression détaillée d'une fonction de courant idéale ou approchée, mais *nous établirons directement que la résultante de l'effort au contact est nulle sur tout contour fermé, en particulier sur toute limite partielle ou obstacle.*

Pour faire image, et en supposant que SOMMERFELD eût pu mener à bien son problème, il y aurait entre sa méthode et la nôtre, la même différence qui existe entre la détermination d'une intégrale définie en passant par une primitive ou bien en l'atteignant directement par la méthode des résidus, à laquelle notre procédé s'apparente manifestement.

En nous reportant à notre chapitre III, particulièrement à son paragraphe III-5, formules (7) et (9), les expressions des projections X, Y sur les axes Ox, Oy, de la résultante générale de l'effort sur un élément de courbe fini, est donné par les intégrales curvilignes, que nous rappelons :

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \int_{\sigma_0, \eta_0}^{x, y} X_1 dy - X_2 dx, \quad Y = \int_{\sigma_0, \eta_0}^{x, y} Y_1 dy - Y_2 dx \end{array} \right.$$

et, en fonction des équations linéarisées, qui s'écrivent :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial X_2}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_2}{\partial y} = 0, \end{array} \right.$$

ce sont des intégrales de différentielles totales.

S'agissant d'un fluide visqueux incompressible, nous avons ici :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_1 = p - 2\eta \frac{\partial u}{\partial x}, \quad X_2 = Y_1 = -\eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad Y_2 = p - 2\eta \frac{\partial v}{\partial y}. \end{array} \right.$$

A partir de l'écriture immédiatement ci-dessus, le principe de conservation de la somme des moments de quantité de mouvement est introduit ipso facto.

L'équation de continuité se réduit à :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

et elle s'évanouit, c'est-à-dire, qu'elle sera identiquement satisfaite, en introduisant la fonction de courant plane ψ en sorte que :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \end{array} \right.$$

Portant les expressions (3) dans (2), il vient immédiatement :

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} - \eta \Delta u = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \Delta v = 0. \end{array} \right.$$

Ce sont les équations de STOKES relatives à cet ensemble particulier de mouvements permanents. Substituant ensuite (4) dans (5), on a la nouvelle forme :

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi = 0, \\ \frac{\partial p}{\partial y} - \eta \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = 0. \end{array} \right.$$

On retiendra, en passant, que le tourbillon ou demi-rotationnel t est égal au demi-Laplacien de ψ , en vertu de :

$$t = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{1}{2} \Delta \psi;$$

Les équations (6) peuvent être considérées comme un système d'équations de CAUCHY, relatives à la fonction :

$$f(z) = \eta \Delta \psi + \sqrt{-1} p,$$

de la variable complexe $z = x + \sqrt{-1} y = r e^{i\theta}$. Le tourbillon t et la pression p satisfont donc à l'équation de LAPLACE, soit en définitive :

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta p = 0, \\ \Delta \Delta \psi = 0, \end{array} \right.$$

En fonction de ces résultats, les deux expressions (1) des composantes XY, de la poussée, dans lesquelles on commencera par substituer (3), s'écriront après quelques réductions :

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \left(yp + 2\eta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x_0, y_0}^{x, y} + \eta \int_{x_0, y_0}^{x, y} y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta \psi}{y} \right) dx - y^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta \psi}{y} \right) dy, \\ Y = \left(-xp + 2\eta \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Big|_{x_0, y_0}^{x, y} - \eta \int_{x_0, y_0}^{x, y} x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta \psi}{x} \right) dx - x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta \psi}{x} \right) dy. \end{array} \right.$$

On vérifie que les intégrales curvilignes sont bien, comme il se doit, des intégrales de différentielles totales, du fait que :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta \psi}{y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[y^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta \psi}{y} \right) \right] = 0,$$

se réduit à : $\Delta \Delta \psi = 0$, et de même pour la seconde intégrale.

Désignant par U et V les *fonctions de point* qu'expriment les intégrales curvilignes, nous avons en définitive :

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} X = \left(U + yp + 2\eta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) \Big|_{x_0, y_0}^{x, y}, \\ Y = \left(V - xp + 2\eta \frac{\partial \psi}{\partial y} \right) \Big|_{x_0, y_0}^{x, y}. \end{array} \right.$$

Du fait de l'existence des fonctions de point U et V, dont nous connaissons une certaine expression des différentielles totales, il suffira d'exprimer, ce qui est évident, que les fonctions :

$$\frac{\Delta \psi}{y} \quad \text{et} \quad \frac{\Delta \psi}{x},$$

sont également des fonctions de point pour obtenir *les relations de réciprocité* nécessaires suivantes, entre différentielles totales :

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} dU = \eta y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta\psi}{y} \right) dx - \eta y^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta\psi}{y} \right) dy \longleftrightarrow \eta d \left(\frac{\Delta\psi}{y} \right) = - \frac{1}{y^2} \frac{\partial U}{\partial y} dx + \frac{1}{y^2} \frac{\partial U}{\partial x} dy, \\ dV = -\eta x^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\Delta\psi}{x} \right) dx + \eta x^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\Delta\psi}{x} \right) dy \longleftrightarrow \eta d \left(\frac{\Delta\psi}{x} \right) = \frac{1}{x^2} \frac{\partial V}{\partial y} dx - \frac{1}{x^2} \frac{\partial V}{\partial x} dy. \end{array} \right.$$

On tire immédiatement des deux expressions de droite, exprimant qu'elles sont des différentielles totales :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta U - \frac{2}{y} \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \Delta V - \frac{2}{x} \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \end{array} \right.$$

on pourra remarquer, en passant, que U et V sont en fonction de (10) solution de l'équation biharmonique.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta \Delta U = 0, \quad \Delta \Delta V = 0, \end{array} \right.$$

Pour que la poussée ne soit pas nulle sur un contour fermé, il faut, visiblement, en l'hypothèse de l'analyticité et de l'uniformité de la pression et des vitesses, qu'au moins une des fonctions U et V ne soit pas uniforme quand nous prendrons X et Y, non plus sur une courbe ouverte, mais sur le contour fermé.

Or, les équations (11) admettent respectivement les solutions analytiques particulières, *non uniformes autour de l'origine*, suivantes :

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} U_1 = C \left(\text{arc tg } \frac{y}{x} - \frac{xy}{r^2} \right), \quad V_1 = -C' \left(\text{arc tg } \frac{y}{x} + \frac{xy}{r^2} \right) \\ (r^2 = x^2 + y^2) \end{array} \right.$$

et toute solution analytique non uniforme autour de l'origine s'obtiendra par addition, aux fonctions particulières précédentes, d'une solution analytique et uniforme quelconque autour de ce domaine.

Substituant alors ces fonctions particulières dans le groupe de droite des équations de réciprocité (10), compte tenu de :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U_1}{\partial y} = 2C \frac{xy^2}{r^4}, \quad \frac{\partial U_1}{\partial x} = -2C \frac{y^3}{r^4}; \quad \frac{\partial V_1}{\partial y} = -2C' \frac{x^3}{r^4}, \quad \frac{\partial V_1}{\partial x} = 2C' \frac{x^2y}{r^4}; \end{array} \right.$$

on en tire, par intégration directe, les fonctions particulières corrélatives :

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \eta (\Delta\psi)_1 = \frac{Cy}{r^2} = C \frac{\sin \theta}{r}, \quad \eta (\Delta\psi)'_1 = C' \frac{x}{r^2} = C' \frac{\cos \theta}{r} \\ (x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta). \end{array} \right.$$

Nous allons maintenant étudier les propriétés des solutions *analytiques et uniformes* du système (6) autour d'un *système d'obstacles*, que nous supposerons provisoirement comme pouvant être renfermés dans une circonférence γ ne coupant ni les limites ni les autres obstacles, non plus que tangente à ces limites ou obstacles étrangers.

On pourra ainsi définir une couronne, basée sur γ et une série de LAURENT correspondante, en sorte que :

$$(14) \quad \eta \Delta \psi + ip = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n z^n = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n r^n e^{ni\theta},$$

les α_n étant, en général, complexes. On déduira, de ceci, qu'en termes réels :

$$(15) \quad \Delta \psi = \sum_{-\infty}^{+\infty} C_n r^n \cos n (\theta - \theta_n);$$

les θ_n et C_n étant des constantes, ces dernières quelconques, *a priori*, sous la seule condition (réalisable) qu'elles assureront la convergence et l'analyticité de la fonction harmonique uniforme exprimée.

Tel est le développement du rotationnel et il est important de remarquer qu'il ne contient pas le terme en $\text{Log } r$, qui rendrait précisément la fonction conjuguée p non uniforme. Il résulte de ce que nous avons établi, que le terme en C_{-1} de ce développement (15) c'est-à-dire :

$$C_{-1} r^{-1} \cos (\theta - \theta_{-1})$$

et à lui seul, joue un rôle particulier, en ce sens qu'il *cause*, à l'exclusion d'aucuns des autres termes, la *non uniformité des fonctions réciproques* U et V , qui figurent dans (9) et déterminent ainsi les composantes X et Y données par ces formules, puisqu'on a sur un contour fermé $\mathcal{C}$:

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} X_{\mathcal{C}} = 2\pi C_{-1} \sin \theta_{-1}, \\ Y_{\mathcal{C}} = 2\pi C_{-1} \cos \theta_{-1} \end{array} \right. \quad (1).$$

Revenons maintenant à l'intégration de l'équation biharmonique $\Delta \Delta \psi$ en termes de la solution analytique la plus générale dans la *couronne basée sur* γ .

  ce sujet, on observera que l'équation biharmonique en question est équivalente et réciproquement à l'équation (15), dont les coefficients du second membre seront considérés comme indéterminés, à la condition de convergence près, que nous savons assurée d'autre part. (En fait et comme nous l'avons fait remarquer, l'expression la plus générale de l'équation biharmonique contiendrait un logarithme au second membre, dont la présence a été démontrée inutile.)

Formons, en effet, la nouvelle *fonction harmonique* :

$$\varphi_1 = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{C_n}{4(n+1)} r^n \cos n (\theta - \theta_n),$$

l'accent qui figure devant le signe Σ' , indiquant que le terme en $n = -1$ doit être omis. Les C_n et θ_n seront les mêmes constantes que celles des termes correspondants de (15). Cette fonction est convergente et analytique dans la *couronne*, au même titre que la série de (15).

(1) Voir DU BOSQ DE BEAUMONT, *Du rôle éventuel des sillages dans le phénomène de la poussée sur l'obstacle dans un courant de liquides visqueux*, C. R. T. 222, pp. 44-16. Il y est traité du cas particulier d'un courant indéfini.

On vérifiera ensuite que la fonction :

$$\psi_0 = r^2 \varphi_1 + \frac{1}{2} C_{-1} r \cos (\theta - \theta_1) \text{Log } r,$$

est une solution particulière de (15). Il suffira pour cela d'appliquer l'opérateur Δ terme à terme, ce que nous avons légitimé précédemment.

Ainsi, la solution analytique et uniforme ψ , la plus générale de (15) dans la *couronne*, satisfera à :

$$\Delta (\psi - \psi_0) = 0.$$

L'intégrale générale cherchée, s'exprimera donc par :

$$(17) \quad \psi = \psi_0 + \varphi_2 = \varphi_2 + r^2 \varphi_1 + \frac{1}{2} C_{-1} r \cos (\theta - \theta_1) \text{Log } r,$$

où φ_2 est une fonction harmonique analytique et uniforme, *a priori* quelconque.

Ce résultat étant établi dans la *couronne* en question, pourra être étendu à tout l'espace compris entre limites et obstacles, sous la seule hypothèse de l'existence d'une solution analytique et uniforme de l'équation biharmonique, dans ce domaine en question, et sous réserve de l'uniformité de l'extension considérée, dont nous nous proposons précisément d'examiner les conditions.

Nous supposons, en premier lieu, que la disposition des limites et obstacles permet de prendre l'origine de la couronne, basée sur la circonférence γ qui a été définie, hors de l'obstacle ou du système d'obstacles ainsi isolé.

Puisqu'on a $\Delta \varphi_1 = 0$, $\Delta \varphi_2 = 0$, on vérifiera ainsi que :

$$\Delta r^2 \varphi_1 = 4 \frac{\partial (r \varphi_1)}{\partial r} \quad \text{et que} \quad \frac{1}{2} \Delta C_{-1} \cos (\theta - \theta_1) r \text{Log } r = C_{-1} \frac{\cos (\theta - \theta_1)}{r},$$

le second résultat n'étant que l'inverse d'une opération déjà effectuée.

La fonction $\Delta \psi$, prolongée en cette origine, devra y être, par hypothèse, harmonique, analytique et uniforme, c'est-à-dire, que, d'après ce que nous venons de dire, on aura dans le voisinage de l'origine :

$$(18) \quad 4 \frac{\partial (r \varphi_1)}{\partial r} + C_{-1} \frac{\cos (\theta - \theta_1)}{r} = \sum_{n=0}^{n=\infty} v_n r^n \cos n (\theta - \tau_n);$$

le second membre de ce développement étant une fonction harmonique.

Intégrant, membre à membre, par rapport à r , il vient, toutes réductions faites :

$$(19) \quad 4 \varphi_1 + C_{-1} \cos (\theta - \theta_1) \frac{\text{Log } r}{r} + \frac{f(\theta)}{r} \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{v_n}{n+1} r^n \cos n (\theta - \tau_n),$$

le second membre étant encore harmonique et analytique dans le voisinage de l'origine, au même titre que celui de (18) et $f(\theta)$ une fonction de θ seul précisément à déterminer.

Appliquant à (19) l'opérateur Δ , membre à membre, il vient par conséquent :

$$\Delta \left[C_{-1} \cos (\theta - \theta_1) \frac{\text{Log } r}{r} + \frac{f(\theta)}{r} \right] = 0,$$

c'est-à-dire :

$$(20) \quad \frac{d^2 f}{d\theta^2} + f = 2 C_{-1} \cos (\theta - \theta_{-1}),$$

dont l'intégrale générale est de la forme :

$$(21) \quad f(\theta) = a \cos \theta + b \sin \theta + C_{-1} \theta \sin (\theta - \theta_{-1}),$$

fonction qui n'est pas uniforme autour de l'origine, à moins que l'on ne pose $C_{-1} = 0$.

La formule (17) se réduira donc, en fait, à :

$$(22) \quad \psi = \varphi_2 + r^2 \varphi_1.$$

car, φ_1 et φ_2 étant harmoniques, ne peuvent compenser cette singularité.

Dont il résulte, d'après (16) que la poussée du fluide sur l'obstacle ou le système d'obstacles considérés sera exactement nulle ⁽¹⁾.

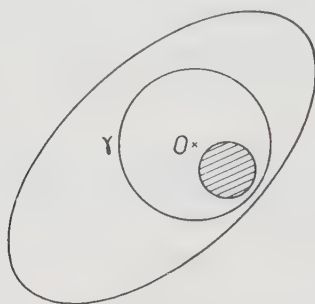


Fig. 3.

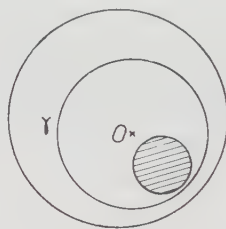


Fig. 4.

Nous allons lever sous peu la restriction provisoire que nous avons faite quant à la disposition de la circonférence γ et de son centre par rapport aux limites et obstacles. Disons maintenant que notre résultat sera directement applicable au cas d'un cylindre de section droite circulaire tournant dans un cylindre, vase d'une forme telle que la circonférence incluse puisse être entourée par une circonférence dont le centre demeure dégagé, comme sur les figures 3 et 4.

La figure 4 représente le cas de deux circonférences excentrées dont l'une peut être entourée dans les conditions précitées.

Encore que ces résultats que nous venons d'obtenir, vont nous permettre d'atteindre des conclusions d'ordre général extrêmement importantes, bien des problèmes particuliers, très intéressants, y échappent, notamment le problème technique du coin d'huile, où les circonférences excentrées présentent dans la pratique des rayons extrêmement voisins, ce qui ne permet pas de réaliser le centre O de la circonférence enveloppante γ extérieurement au cercle correspondant à la section droite du cylindre intérieur.

(1) DU BOSQ DE BEAUMONT, *loc. cit. ante*, C. R. T. 222. La démonstration présente est une extension notable de celle de la note en question qui ne concernait que le cas d'un obstacle dans un courant rectiligne troublé.

On peut alors étendre la proposition comme suit (*fig. 5*).

Pratiquant une coupure sur un arc $\widehat{ab}$ de l'obstacle intérieur que l'on pourra, par exemple, prolonger en lacune $\widehat{ac'b}$ intérieure à l'obstacle lui-même, on dégagera ainsi le centre O d'une circonférence γ entourant l'obstacle.

Le théorème sera valable pour le nouveau contour c'est-à-dire que la nouvelle poussée résultante :

$$\mathcal{R}_{acbe'a} = \mathcal{R}_{acb} - \mathcal{R}_{ac'b} = R - R' = 0.$$

sera donc nulle.

Quand on fait varier continûment, d'ailleurs infiniment peu en l'occurrence, l'ensemble du contour, on se rendra compte, d'après les expressions analytiques qui en ont été données, que la poussée résultante varie continûment. Or, à la limite, quand la coupure $\widehat{ab}$ tend à se refermer, la poussée afférente à la lacune intérieure, c'est-à-dire R' ,

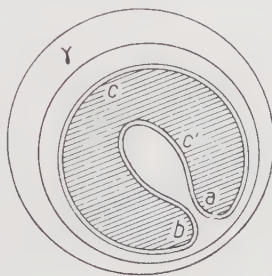


Fig. 5.

tend visiblement vers zéro en régime permanent; le mouvement dans la lacune tendant nécessairement vers le mouvement « en bloc ».

C'est-à-dire que, de $R' = 0$, on tire :

$$R = 0.$$

Pour rendre notre raisonnement absolument rigoureux, il faudra, en fait, substituer au contour $acbe'a$ un contour qui, lui, soit très voisin et intérieur au fluide, pour lequel la poussée est certainement calculable. L'assimilation de la résultante ainsi calculée, à celle qui s'exerce effectivement sur la surface même de l'obstacle, implique ensuite certaines hypothèses sur l'intégrabilité des dérivées secondes de ψ sur les limites et qui pourraient ne pas être, *a priori*, assurées. Ces hypothèses sont, comme on le comprendra, inséparables du principe de l'égalité de l'action à la réaction qui exige précisément que la résultante appliquée à une masse de fluide aussi petite que l'on voudra, en l'espèce la couche de passage que nous venons d'invoquer, soit, elle-même, arbitrairement petite.

La poussée sur l'obstacle est donc nulle, sans restriction, en vertu des principes même de la mécanique.

C'est-à-dire encore, en d'autres termes, que les solutions analytiques des équations de STOKES donnent en toutes circonstances une résultante nulle et doivent, en conséquence, être rejetées comme ne pouvant expliquer l'existence dynamique expérimentalement constatée d'un film d'huile, dont la réaction fait équilibre aux actions mécaniques extérieures ⁽¹⁾.

(1) Toutefois si l'on admet que la lacune intérieure pratiquée par coupure contient nécessairement des singularités non ponctuelles, le raisonnement peut être en défaut.

Pour échapper aux conclusions précédentes, on pourrait peut-être penser qu'il suffirait de ne pas négliger les carrés des vitesses dans les équations générales. Nous ne croyons pas cette opinion soutenable, il faudrait, pour cela, admettre, l'effet de viscosité pure ayant été montré maintenant comme étant rigoureusement nul en termes de solutions analytiques, que l'existence du film serait principalement assurée par les termes hydrauliques rectangles négligés et que, par exemple, l'eau devrait assurer sensiblement la même lubrification, ou tout au moins une lubrification du même ordre, que celle que procurent les huiles les plus visqueuses, de densité comparable; ce qui n'est pas conforme à l'expérience.

Revenant aux solutions analytiques des équations de STOKES, on peut encore donner au paradoxe rencontré, la forme remarquable suivante :

Soit un système de cylindres excentrés, de sections droites circulaires, susceptibles de tourner autour de leurs axes fixes $O_1 O_2$, (fig. 6).

L'espace interstitiel, compris entre les circonférences $C_1 C_2$ est rempli par un liquide visqueux.

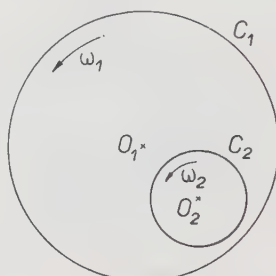


Fig. 6.

Le cylindre extérieur, de trace C_1 , est animé d'un mouvement circulaire uniforme, de vitesse angulaire ω_1 , autour de son centre O_1 et, pour ce faire, nous y appliquerons un certain couple Γ_1 qui, en régime permanent, doit donc être entièrement transmis au cylindre intérieur de trace C_2 .

Aucune résultante n'étant en jeu, comme nous l'avons démontré, si nous appliquons rigoureusement les principes de la mécanique, nous supposons ensuite le cylindre intérieur fou sur son axe; c'est-à-dire que nous n'opposons aucun couple antagoniste $-\Gamma_1$ au couple $+\Gamma_1$ transmis hypothétiquement de C_1 à C_2 , par l'effet de la viscosité du liquide : Le couple Γ_1 serait donc nul, à moins d'admettre que le régime permanent ne puisse être atteint.

Mais, d'autre part, l'énergie transmise au fluide même, par unité de temps, qui doit de toute évidence être au plus égale à celle transmise au système, soit $\Gamma_1 \omega_1$ devrait donc être nulle.

D'où une contradiction formelle puisque cette énergie est exprimée par la fonctionnelle de Lord RAYLEIGH, selon ce que nous avons établi au cours de notre chapitre III soit ici :

$$\begin{aligned} & - \iint \left(X_1 \frac{\partial u}{\partial x} + X_2 \frac{\partial u}{\partial y} + Y_1 \frac{\partial v}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) dx dy \\ & = - \iint \left[\left(p - 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(p - 2\eta \frac{\partial v}{\partial y} \right) \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy \\ & = \eta \iint \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy > 0. \end{aligned}$$

Ceci, remarquant encore qu'un mouvement « en bloc » est en la circonstance impossible, à moins d'admettre l'immobilité absolue du fluide et un glissement intégral aux deux limites.

Mais encore si l'on ne rejette la possibilité d'un régime permanent, il n'échappera pas finalement qu'il y a là un conflit de principes et, pour le résoudre, nous ne voyons que deux alternatives :

Soit admettre que tout obstacle est réuni, au moins au parois, par des lignes de discontinuités analytiques qui l'empêcheraient ainsi d'être contourné, ou bien admettre que le *théorème de la conservation des sommes des moments de quantité de mouvement* est en quelque manière en défaut.

En d'autres termes, dans cette seconde alternative, que le *principe de l'égalité de l'action à la réaction*, au sens de NEWTON, entre points élémentaires, serait dans une certaine mesure trop étroit vis-à-vis des possibilités les plus générales de la mécanique des fluides, et auquel nous ne verrions rien de choquant à voir substituer un *principe de symétrie*, qui reviendrait à considérer l'ensemble de l'action et de la réaction entre deux points, comme formant un certain couple dont le plan et la grandeur seraient à préciser. Le théorème du mouvement uniforme du centre de gravité d'un système isolé étant ainsi conservé, comme l'exige la symétrie que ce théorème revient en somme à exprimer.

Sans vouloir méconnaître les services que pourrait rendre l'introduction pure et simple de *sillages*, en dehors desquels les équations seraient satisfaites, au moins quant à l'interprétation de certains problèmes particuliers ⁽¹⁾ nous pensons toutefois qu'en présence de telles conclusions, une étude critique et serrée, aussi bien expérimentale que mathématique, du *principe de l'égalité de l'action à la réaction*, sous la forme du *théorème de conservation des sommes de moments de quantité de mouvement*, s'impose absolument.

En réalité, nous n'avons mis en évidence, en fonction des principes et équations admis, que la nécessité de discontinuités analytiques, délimitant des régions contiguës à l'intérieur desquelles les équations seraient satisfaites.

On peut montrer qu'en l'hypothèse ces discontinuités sont vraisemblablement du premier ordre, c'est-à-dire *des sillages*. A cet effet, revenons à nos équations (1), sous forme différentielle, tenant compte de (3), on a, par exemple :

$$(23) \quad dX = X_1 dy - X_2 dx = \left(p - 2\eta \frac{\partial u}{\partial x} \right) dy + \eta \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx = p dy + 2\eta dv - \eta \zeta dx,$$

où :

$$(24) \quad \zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y},$$

$2\eta dv$ est une différentielle totale, il en est donc de même de $p dy - \eta \zeta dx$; on a d'ailleurs, sur tout contour fermé :

$$(25) \quad \int_C p dy - \eta \zeta dx = \iint_S \left(\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right) dx dy = 0,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial \zeta}{\partial y} = 0,$$

(1) DU BOSQ DE BEAUMONT, *loc. cit. ante*, C. R. T. 222.

étant une des équations du mouvement. Mais nous sommes ici, dans un cas limite où les forces extérieures appliquées aux éléments de l'aire S sont nulles et, en général, ces forces ne sont pas nulles et l'équation (25) que nous venons d'écrire, exprimera l'équilibre entre les forces appliquées au contour C et les forces appliquées à S , qu'elles existent effectivement ou non. Nous admettrons, ici, que même si la solution cherchée n'est pas continue, l'on a encore :

$$\int_C p \, dy - \eta \zeta \, dx = 0,$$

C étant alors *le contour de l'obstacle* et les *forces extérieures* appliquées au fluide même *étant absentes*.

Selon cette *hypothèse*, les variations de X et de Y données par nos équations (8) ou (9) se réduiront, sur le contour fermé C , à celles de $2 \, \eta v$ et $2 \, \eta u$ respectivement, qui devront donc être discontinues.

CONCLUSION

Conformément à notre programme, nous avons montré, d'une part que la *Thermodynamique* était une pure et simple extension du *principe des forces vives* à des schémas plus complexes que ceux qui font l'objet de la *Mécanique Rationnelle*, d'où ce principe est issu.

Nous n'avons rencontré aucune difficulté à cette extension et avons été puissamment guidés par le fait que la Thermodynamique est une science actuellement bien constituée qui a fait ses preuves et en étend le domaine continuellement.

Du point de vue théorique, nous avons surtout tenu à établir qu'un système en état d'irréversibilité, ne pouvait être représenté, en toute rigueur, au moyen d'un nombre fini de variables. Nous avons appliqué au paradoxe de M. Marius AUBERT et pensons l'avoir réduit au moyen d'une représentation qui nous paraît satisfaisante.

D'autre part, en ce qui concerne la *Viscosité*, nous avons rencontré des difficultés d'un ordre très supérieur aux précédentes. Les équations de la *Viscosité* semblent *a priori*, ne tenir aucun compte du fait de la dissipation de l'énergie apparente, ce sont des équations de *Mécanique Rationnelle*. Nous avons montré que les paradoxes que font naître ces équations gravitent autour de la question relative au *principe de conservation des moments de quantité de mouvement*, de même que la *Thermodynamique* est, elle, une adaptation du *principe des forces vives*. Ainsi cette adaptation du *principe de conservation des moments de quantité de mouvement*, ne pourrait, d'après nous, se faire qu'en introduisant des discontinuités des vitesses au sein du fluide, ou tout au moins des discontinuités analytiques, c'est-à-dire des singularités.

Nous avons, d'ailleurs, montré que dans le cas des *systèmes à symétrie axiale*, en mouvement permanent, la discontinuité des vitesses aux limites était une nécessité rationnelle et nous avons pu parvenir à ce résultat, en établissant deux expressions égales et non identiques du couple, cela au prix d'une définition du sens exact de la *Fonctionnelle de Lord RAYLEIGH*, outil qui relie en quelque sorte la viscosité à la Thermodynamique, pour ce qui peut en relever.

Relativement aux *problèmes plans*, qui reviennent à une extension du *problème du coin d'huile*, nous avons établi que la poussée sur l'arbre en rotation et, en général, sur tout obstacle dans un liquide visqueux en mouvement, ne pouvait exister que si l'on admettait les sillages précités ou des singularités, qui rendent illusoires les problèmes analytiques entiers du type de celui que proposa SOMMERFELD.



IMPRIMERIE

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

ÉTABLISSEMENT DU COURANT
DANS UN CIRCUIT AVEC RÉSISTANCE
ET SELF-INDUCTION VARIABLE

Vu et approuvé :

Paris, le 14 Avril 1948.

Le Doyen de la Faculté des Sciences,

J. CABANNES.

Vu et permis d'imprimer :

Le Recteur de l'Académie de Paris,

Jean SARRAILH.



IMPRIMERIE